TECNOLÓGICO
NACIONAL DE MÉXICO

Material didáctico para Curso Propedéutico

Matemáticas

Hola, jóvenes estudiantes egresados de Bachillerato.

Reciban un saludo y una cordial bienvenida al Instituto Tecnológico de Huatabampo y al Tecnológico Nacional de México, el Sistema formador de Ingenieros más grande de América Latina.

Antes que nada, quiero decirte que me da mucho gusto que nos hayas elegido para realizar tus estudios profesionales, verás como juntos, en los próximos cuatro años, vamos a construir tu futuro.

También deseo comentarte que el ITHua es una institución de educación superior que cuenta con 36 años de experiencia formando profesionistas para México y el mundo. Me llena de orgullo comentarte que contamos con casi 4000 egresados y la mayoría de ellos es una de historia de éxito en el ámbito académico, profesional, cultural, además del personal y familiar. Pero, ¿sabes qué es lo más interesante? que todos nosotros —porque también soy egresado del ITHua— empezamos, al igual que tú en estos momentos, con este primer paso. Así que adelante, jamás dudes que estás en una institución que puede darte lo que necesitas para una excelente formación profesional.

Es por lo anterior, joven estudiante, que hoy quiero establecer contigo el compromiso de ofrecerte una educación actualizada, integral, acorde a la exigencia del mundo actual y, sobre todo, impartida con calidad, profesionalismo y empatía por parte de nuestros docentes. Me comprometo joven a estar al pendiente de que recibas la mejor formación profesional de nuestra región.

¡Bienvenido a casa PELÍCANO!

Dr. Gil Arturo Quijano Vega

Director TecNM Campus Huatabampo

TECNOLÓGICO NACIONAL DE MÉXICO

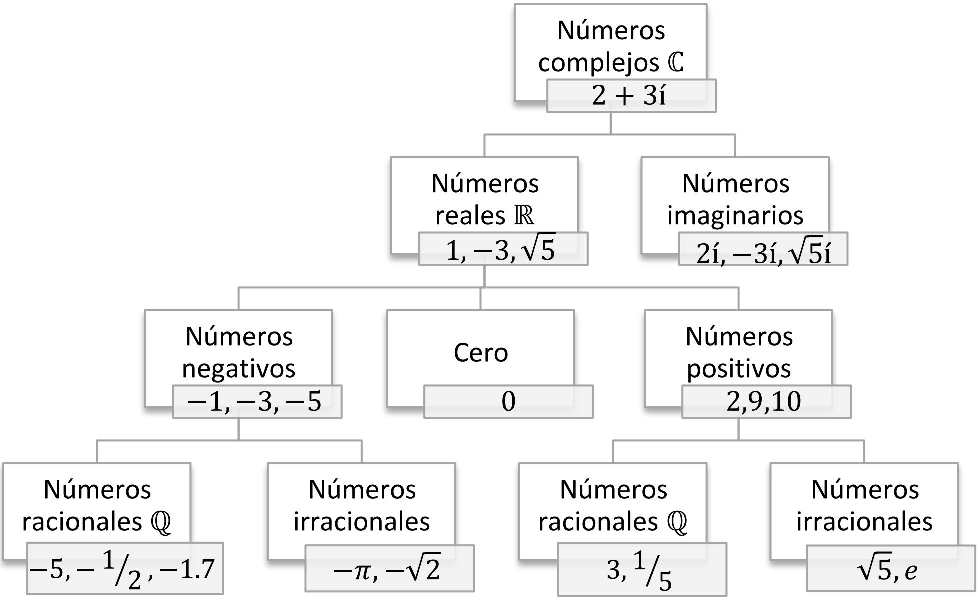
Contenido

1. Álgebra

1.1 Lenguaje algebraico

1.1.1 Números reales

La aritmética es la parte de las matemáticas que estudia los *números reales*, que son la forma como se representan las cantidades; también existe otra categoría de números que se llaman *números complejos*, pero que no se estudiarán en este curso. Todos los números se clasifican en



Los números reales son todos aquellos que podemos localizar en la recta numérica.

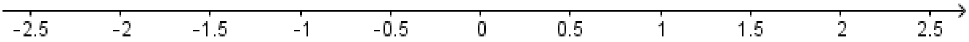


Ilustración 1. Recta numérica de números reales.

El valor cero (0), se coloca en el centro de la recta numérica, los valores negativos se ubican a la izquierda del cero, y los valores positivos a la derecha.

Los números racionales son los que se pueden expresar como números enteros, y números fraccionarios (o números con cantidades decimales); estos últimos tienen la característica que al escribirse en forma decimal, estos dígitos son finitos o infinitos y, si son infinitos, entonces estos cuentan con un patrón colocando una línea horizontal (llamada testa) sobre ese patrón que se repite indefinidamente, por ejemplo

$$2 \qquad \frac{1}{2} = 0.5 \qquad \frac{1}{3} = 0.3\overline{3}\ldots \qquad 4.59 \qquad 8.7295\overline{95}\ldots$$

Los números racionales se clasifican en:

a) Números *decimales exactos*. Son los números que en sus decimales no son infinitos, ejemplos: 0.5, 1.25, 0.1234.
b) Números *decimales periódicos puros*. Son los números que sus decimales se repiten en forma infinita, ejemplos: $0.\overline{3}$, $0.\overline{45}$, $2.\overline{408}$.
c) Números *decimales mixtos*. Son los números que en sus decimales contienen números que no se repiten y numero que se repiten en forma periódica infinita, ejemplos: $0.2\overline{3}$, $0.249\overline{5}$, $0.187\overline{5455}$.

Es posible convertir *números racionales* a *números fraccionarios* por el siguiente método:

Paso 1. Identificar el tipo de decimales con los que cuenta el número a convertir.

Paso 2. a) Si es un número con decimales exactas.

$$a.b$$

- Se toma en cuenta la cantidad de decimales que tiene el número,

$$a.\underbrace{b}_{n}$$

(siendo n la cantidad de números después del punto decimal)

- Se divide entre 1:

$$\frac{a.b}{1}$$

- Se multiplica en el numerador y en el denominador por 10^n, de tal forma que

$$\frac{a.b\,(10^n)}{1\,(10^n)}$$

- Se reduce si es posible.

b) Si es un número con decimales periódicos puros.

$$a.\overline{b}$$

- Se iguala a x el número a convertir

$$x = a.\overline{b}$$

- Se toma en cuenta la cantidad de decimales con testa que tiene el número,

$$x = a.\underbrace{\overline{b}}_{n}$$

(siendo n la cantidad de números después del punto decimal con testa)

- Se multiplica toda la ecuación por 10^n

$$10^n[x = a.\overline{b}]$$

$$10^n x = 10^n(a.\overline{b})$$

- Se resta de este resultado la ecuación original

$$\begin{aligned} 10^n x &= 10^n(a.\overline{b}) \\ -x &= -a.\overline{b} \end{aligned}$$

- Del resultado se despeja x.
- Se reduce si es posible.

c) Si es un numero con decimales mixto.

$$a.b\bar{c}$$

- Se iguala a x en número a convertir.

$$x = a.b\bar{c}$$

- Se toma en cuenta la cantidad de decimales antes de testa que tiene el número,

$$x = a.\underbrace{b}_{n}\bar{c}$$

(siendo n la cantidad de números después del punto decimal antes de testa)

- Multiplicar todo el número por una potencia de 10^n, para convertir a decimal periódico puro:

$$\begin{aligned} 10^n&[x = a.b\bar{c}] \\ 10^n x &= 10^n(a.b\bar{c}) \\ 10^n x &= ab.\bar{c} \qquad\qquad (1) \end{aligned}$$

- Se verifica la cantidad de números que se encuentran con testa

$$10^n x = ab.\underbrace{\bar{c}}_{m}$$

(siendo m la cantidad de números después del punto decimal con testa)

- Multiplicar el resultado obtenido por potencia de 10^m

$$10^m[10^n x = ab.\bar{c}]$$

$$10^{\{m+n\}}x = 10^{m}ab.\bar{c} \qquad (2)$$

- Ahora se hace la resta (1) de (2):

$$\begin{aligned} 10^{\{m+n\}}x &= \quad 10^{m}ab.\bar{c} \\ - \quad 10^{n}x &= -ab.\bar{c} \end{aligned}$$

- Se despeja x.

Ejemplos

Convertir los siguientes números racionales a fraccionarios.

1. 0.25

Solución

Se trata de un número con decimal exacto,

$$0.\underbrace{25}_{n}$$

cuenta con dos decimales, por lo tanto, $n = 2$.

$$0.25 = \frac{0.25}{1} \qquad \textit{Se igualó a } \frac{0.25}{1}$$

$$0.25 = \frac{0.25(10^{2})}{1(10^{2})} \qquad \textit{Se multiplica por } \frac{10^{n}}{10^{n}}$$

$$0.25 = \frac{0.25(100)}{1(100)}$$

$$0.25 = \frac{25}{100} \qquad \textit{Se multiplicó por } \frac{10^{n}}{10^{n}}$$

$$0.25 = \frac{1}{4}$$

2. $0.\overline{3}$

Solución

Se trata de un número con decimal periódico puro,

$$0.\underbrace{\overline{3}}_{n}$$

cuenta con un decimal con testa, por lo tanto, $n = 1$.

$$x = 0.\overline{3} \qquad (1)$$

Se igualó a x

$$10^1 x = 10^1(0.\overline{3})$$

Se multiplica por 10^n

$$10x = 3.\overline{3} \qquad (2)$$

Se multiplicó por 10^n

$$\begin{array}{rl} 10x = & 3.\overline{3} \\ - \quad x = & -0.\overline{3} \\ \hline 9x = & 3 \end{array}$$

Se resta (1) *de* (2)

$$x = \frac{3}{9}$$

Se despejó x

$$0.\overline{3} = \frac{1}{3}$$

Se redujo el resultado

Otra forma de solución

$$a.\overline{b} = \frac{numeros\ bajo\ la\ testa - numeros\ antes\ del\ punto\ decimal}{9\ repetido\ n\ veces}$$

Convertir $0.\overline{3}$

$$0.\overline{3} = \frac{3-0}{9}$$

$$0.\overline{3}=\frac{3}{9}$$

$$0.\overline{3}=\frac{1}{3}$$

3. $0.201\overline{32}$

Solución

Se trata de un número con decimal periódico mixto,

$$0.\underbrace{201}_{m}\,\underbrace{\overline{32}}_{n}$$

cuenta con dos decimales sin testa, $m=3$*,*
con dos decimales con testa, $n=2$*.*

$$x=0.201\overline{32} \qquad \textit{Se igualó a } x$$

$$10^3x=10^3(0.201\overline{32}) \qquad \textit{Se multiplica por } 10^m$$

$$1000x=201.\overline{32} \qquad (1)$$

$$10^2(1000x)=10^2(201.\overline{32}) \qquad \textit{Se multiplica por } 10^n$$

$$100000x=20132.32 \qquad (2)$$

$$\begin{array}{rrl} 100000x = & 20132.32 & (2) \\ -\quad 1000x = & -201.\overline{32} & (1) \\ \hline 99000x = & 19931 & \end{array} \qquad \textit{Se resta } (1) \textit{ de } (2)$$

$$x=\frac{19931}{99000} \qquad \textit{Se despejó } x$$

Otra forma de solución

$$a.\overline{b} = \frac{numero\ sin\ punto - numeros\ sin\ punto\ y\ antes\ antes\ de\ testa}{9\ repetido\ n\ veces\ y\ 0\ repetido\ m\ veces}$$

Convertir $0.201\overline{32}$

$$0.201\overline{32} = \frac{020132 - 0201}{99000}$$

$$0.201\overline{32} = \frac{19931}{99000}$$

Ejercicios

Convertir los siguientes números racionales a números fraccionarios.

1. 0.524
2. 1.29
3. $3.25\overline{374}$
4. $2.\overline{5487}$
5. $0.25291\overline{819}$
6. $4.\overline{232928}$
7. $25.\overline{3456789}$
8. $11.987\overline{6543210}$
9. $10.1418\overline{19}$
10. $92.2127294\overline{815}$

Mientras que los números irracionales, son los que al escribirse en forma decimal son infinitos y no cuentan con un patrón a seguir, por ejemplo

$$\frac{5}{7} \approx 0.7142\ldots \qquad \sqrt{2} \approx 1.41\ldots \qquad \pi \approx 3.141\ldots \qquad e \approx 2.71\ldots$$

No es posible convertir los números irracionales a números fraccionarios.

Con los números reales se pueden realizar todas las operaciones matemáticas como suma, resta, multiplicación, división, etc.

Las operaciones matemáticas básicas de números reales cuentan con las siguientes propiedades.

Sean a, b, c números reales, entonces.

Propiedades	Expresión matemática	Ejemplo
1. La suma es conmutativa	$a + b = b + a$	$1 + 3 = 3 + 1$
2. La suma es asociativa	$a + (b + c) = (a + b) + c$	$2 + (3 + 4) = (2 + 3) + 4$
3. El neutro aditivo es 0	$a + 0 = a$	$4 + 0 = 4$
4. El negativo o inverso aditivo de a es $-a$	$a + (-a) = 0$	$2 + (-2) = 0$
5. La multiplicación es conmutativa	$a \cdot b = b \cdot a$	$2 \cdot 5 = 5 \cdot 2$
6. La multiplicación es asociativa	$a(bc) = (ab)c$	$3(4 \cdot 5) = (3 \cdot 4)5$
7. El neutro multiplicativo es 1	$a(1) = a$	$5(1) = 5$
8. El reciproco o inverso multiplicativo de a es $a^{-1} = \frac{1}{a}$, siendo $a \neq 0$	$a\left(\frac{1}{a}\right) = 1$	$8\left(\frac{1}{8}\right) = 1$
9. La multiplicación es aditiva sobre la adición	$a(b + c) = ab + ac$	$2(4 + 5) = 2(4) + 2(5)$

10. La igualdad	Si $a = b$ y c un número cualquiera, entonces • $a + c = b + c$ • $ac = bc$	$2 + 3 = 2 + 3$ $2(5) = 2(5)$
11. Productos con cero	• $a \cdot 0 = 0$ • Si $ab = 0$, entonces $a = 0$ y/o $b = 0$	$2(0) = 0$ $0(0) = 0$
12. Negativos	• $-(-a) = a$ • $-(ab) = (-a)b = a(-b)$ • $-a(-b) = ab$ • $-1(a) = -a$	• $-(-3) = 3$ • $-(4 \cdot 5) = (-4)5 = 4(-5)$ • $-3(-4) = 3(4)$ • $-1(5) = -5$
13. Resta	$a - b = a + (-b)$	$3 - 2 = 3 + (-2)$
14. Relación entre a y $-a$	• Si a es positiva, entonces −a es negativa. • Si a es negativa, entonces −a es positiva.	• Si $a = 2$, entonces $-\mathrm{a} = -(2) = -2$ • Si $\mathrm{a} = -2$, entonces $-\mathrm{a} = -(-2) = 2$
15. Mayor que o menor que	• Si $a - b$ es positivo, entonces $a > b$. • Si $a - b$ es negativo, entonces $a < b$	• $4 - 3 = 1$ • $3 - 4 = -1$

Ley de tricotomía

Si a y b son números reales, entonces exactamente una de las siguientes afirmaciones es verdadera:

$$a = b \qquad a > b \qquad a < b$$

Multiplicación de números reales

Hablando de la multiplicación de números reales, se sabe que es una sucesión de sumas, se indican con $\times$, $\cdot$, $(⬚)$, $[⬚]$, $\{⬚\}$. Cabe indicar que en la multiplicación 0 e ∞ son casos especiales, de tal forma que si a es un número real, entonces

$$0(\infty) = indeterminado \qquad a(\infty) = \infty \qquad \infty(\infty) = \infty$$

Generalmente se complica un poco cuando se trata de números que tienen más de una cifra o dígito; para realizarlas de una forma más sencilla se propone el siguiente método que consiste en descomponer las cantidades en otras más pequeñas y luego sumar; como se muestra en los siguientes ejemplos.

Ejemplos

Determinar la solución de las siguientes multiplicaciones

1. $17(12)$

Solución

$17(12)$	*Se descompone* 12 *en* $10 + 2$
$17(12) = 17(10 + 2)$	*Multiplicando* 17×10 *y* 17×2
$17(12) = 170 + 34$	*luego se suma*
$17(12) = 204$	

2. $15(123)$

Solución

Se descompone 123 *en* $100 + 10 + 10 + 3$

$15(123)$	
$15(123) = 15(100 + 10 + 10 + 3)$	*Se multiplica* 15 *por cada sumando*

$$15(123) = 1500 + 150 + 150 + 45$$ *luego se suma*

$$15(123) = 1845$$

Ejercicios

Resuelve mentalmente los siguientes ejercicios de multiplicación usando el método de descomposición y luego compara tus resultados con una calculadora.

1. $14(124)$
2. $137(12)$
3. $25 \cdot 147$
4. $(27)(242)$
5. $30(147)$
6. $22(19)$
7. $25(37)$
8. $35(190)$
9. $124(12)$
10. $20(278)$

Operaciones matemáticas básicas con números reales fraccionarios

Sean a, b, c, d números reales, se definen

Suma y resta de fracciones	Multiplicación de fracciones
$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$ $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$	$\frac{a}{b}\left(\frac{c}{d}\right) = \frac{ac}{bd}$ con $bd \neq 0$
Suma y resta de entero y fracción	Multiplicación de entero y fracción
$a \pm \frac{b}{c} = \frac{ac \pm b}{c}$	$a\left(\frac{b}{c}\right) = \frac{ab}{c}$ con $c \neq 0$
División de fracciones	Notación mixta
$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$ $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$	$\frac{a}{b} = C\frac{residuo}{b}$ $C\frac{a}{b} = \frac{cb + a}{b}$

con $bc \neq 0$

Descomponer fracción	Inverso de la fracción
$\frac{a}{b} = \frac{1}{b}a$	$a\left[\frac{1}{a}\right] = 1$ $\qquad$ $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$

Se debe tomar en cuenta que en las fracciones 0 e ∞ son casos especiales que deben considerarse de la siguiente manera.

Sea a un número real, entonces

1. $\frac{a}{0} = \infty$
2. $\frac{0}{a} = 0$
3. $\frac{0}{0} = indeterminado$
4. $\frac{a}{\infty} = 0$
5. $\frac{\infty}{a} = \infty$
6. $\frac{\infty}{\infty} = indeterminado$

Ejercicios

Demostrar las soluciones a cada ejercicio

	Ejercicio	*Solución*
1.	$\frac{1}{2} + \frac{3}{4}$	$\frac{5}{4}$
2.	$-\frac{5}{4} + \frac{2}{9}$	$-\frac{37}{36}$
3.	$-\frac{5}{4} - \frac{2}{9} + \frac{3}{8} - \frac{4}{5} + \frac{8}{7} + 2$	$1\frac{619}{2520}$

4. $-\frac{\frac{5}{2}}{\frac{9}{7}}+5\frac{3}{2}-\frac{2}{9}+4$ $\quad$ $8\frac{1}{3}$

5. $-5+\frac{4}{9}$ $\quad$ $-\frac{41}{9}$

Es conveniente el uso de fracciones, porque estas representan cantidades exactas; generalmente los decimales representan cantidades aproximadas.

1.1.2 Variables y constantes

El álgebra es la parte de las matemáticas que se utiliza para representar números y expresiones en forma general, para ello hace uso de *variables* y *constantes*.

Las variables, son todos los valores que pueden cambiar en el ejercicio analizado o durante el transcurso de solución; Las variables se escriben con las ultimas letras minúsculas del alfabeto: x, y, z u otra.

Las constantes son los valores que no cambian durante el análisis de un ejercicio o en su solución. Las constantes pueden ser *absolutas* (numéricas) o *arbitrarias* (parámetros). Las constantes absolutas son las que no cambian, por ejemplo 1, 7, -3, etc. Mientras que las arbitrarias son a las que se puede asignar un valor numérico, pero ese valor no cambia, estas se representan con las primeras letras minúsculas del alfabeto, por ejemplo a, b, c u otra. Así, por ejemplo en la expresión

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+1=0$$

Se tiene que

$$\underbrace{\overbrace{\frac{a}{x}+\frac{b}{y}}^{\text{constantes arbitrarias}}}_{\text{variables}} + \underbrace{1 = 0}_{\text{const. absolutas}}$$

Las letras mayúsculas también se utilizan pero se encuentran reservadas para identificar otros nombres como por ejemplo, los vértices de un triángulo, un punto en el plano cartesiano, un conjunto de elementos, etc. Mientras que las letras griegas generalmente se utilizan para nombrar ángulos.

El alfabeto griego consta de las siguientes letras:

$A\ \alpha$	Alfa	$Z\ \zeta$	Dseta	$\Lambda\ \lambda$	Lambda	$\Pi\ \pi$	Pi	$\Phi\ \phi$	Fi
$B\ \beta$	Beta	$H\ \eta$	Eta	$M\ \mu$	Mi o mu	$P\ \rho$	Rho	$X\ \chi$	Chi
$\Gamma\ \gamma$	Gama	$\Theta\ \theta$	Teta	$N\ \nu$	Ni o nu	$\Sigma\ \sigma$	Sigma	$\Psi\ \psi$	Psi
$\Delta\ \delta$	Delta	$I\ \iota$	Iota	$\Xi\ \xi$	Xi	$T\ \tau$	Tau	$\Omega\ \omega$	Omega
$E\ \varepsilon$	Épsilon	$K\ \kappa$	Kapa	$O\ o$	Ómicron	$\Upsilon\ \upsilon$	Ípsilon		

1.1.3 Notaciones algebraicas

También existe el uso de otros símbolos que se utilizan como lenguaje matemático, los cuales significan palabras o frases, a continuación se presentan algunos de ellos:

∞	Infinito	$<$	Menor que	$\gg$	Mucho mayor que
$\neq$	Diferente	$>$	Mayor que	$\cong$	Aproximadamente igual a
$\sim$	Aproximadamente	$\leq$	Menor o igual que	$\approx$	Casi igual a
$!$	Factorial	$\geq$	Mayor o igual que	$\equiv$	Idéntico
$\propto$	Proporcional a	$\ll$	Mucho menor que	$\forall$	Para todo

∁	Complemento	∪	Unión	∩	Intersección
∅	Conjunto vacío	∆	Incremento	∇	Decremento
∃	Existe	∄	No existe	∋	Contiene como elemento
∈	Pertenece a	¬	Negación	∧	Y
∨	O	/	Tal que	∥	Paralelo a
⊥	Perpendicular a	≍	Equivalente a	∟	Ángulo recto
∠	Ángulo	∡	Ángulo medido	⊾	Ángulo recto con arco
∢	Ángulo esférico	⊿	Triángulo rectángulo	⋕	Igual y paralelo a
∤	No divide	∦	No paralelo	∶	Razón
∷	Proporción	∴	Por tanto	∵	Porque
𝑖	Imaginario	≺	Precede	∎	Fin de la demostración
≻	Sucede	≼	Precede o es igual a	≽	Sucede o es igual a
⊂	Subconjunto de	⊐	Original cuadrado de	⊏	Imagen cuadrada de
℮	Estimado	⊢	Produce	⊣	No produce
ℝ	Números reales	ℕ	Números naturales	ℂ	Números complejos
ℤ	Números enteros	ℚ	Números racionales		

1.1.4 Convertir de lenguaje común a lenguaje algebraico

Es necesario que primero se entienda que las matemáticas no son solamente sumas, restas, multiplicaciones, divisiones, etc. Sino que la clave para poder resolver ejercicios matemáticos es aprender a identificar *qué se tiene* y *qué se puede hacer con ello*; esto es el principio para las matemáticas. Por ejemplo si se tiene $1+1=2$, ¿cómo se determinó la solución 2? Primero fue necesario identificar *qué se tiene*, en este caso es 1 y otro 1; luego *qué se puede hacer con ello*, sumar $+$. Esto es matemáticas.

Siempre se hace uso de las matemáticas en la vida diaria, solo que pocas veces las personas se dan cuenta de ello, por ejemplo, un estudiante del ITHua que despierta por la mañana y está decidiendo qué camiseta usará ese día para sus clases; lo primero es que debe conocer con qué camisetas cuenta (*qué se tiene*), ya que algunas pueden estar sucias, luego decidir los colores de pantalón que combinan con esa camiseta (*qué se puede hacer con ello*); esto es matemáticas.

Para poder expresar estas y otra infinidad de situaciones en forma algebraica es indispensable *comprender*… sí, comprender. Es como aprender un nuevo idioma, ya que este lenguaje también tiene reglas como las tiene cualquier otro idioma.

No existe una técnica específica para traducir el lenguaje común a algebraico, es algo que se gana con la experiencia, pero pueden resultar útiles las siguientes recomendaciones:

1. Leer cuidadosamente el enunciado cuantas veces sea necesario para comprenderlo.
2. Identificar variables y constantes. Luego ordenarlas con las operaciones que el enunciado indique.
3. Si hay alguna pregunta en el enunciado, esta contendrá a la variable que se desea conocer su valor numérico.

Ya en temas pasados se definieron los conceptos de constantes y variables, muy bien pues ahora se verán ejemplos de las traducciones del lenguaje común a lenguaje algebraico.

Ejemplos

Traducir los siguientes enunciados en lenguaje común a lenguaje algebraico.

1. Un número real cualquiera

Solución

Es común que cuando a alguien le dicen “dime un número cualquiera”, esa persona responda: “1”, “0”, “7” u otro.

Esto es porque no ha entendido que hay una palabra clave que es: “cualquiera”. Si el enunciado no contiene esta palabra clave, entonces la respuesta sería correcta; ya que se trataría de una constante absoluta.

Pero al estar presente esta palabra clave, se trata de un número que puede ser cualquiera que se encuentre en la recta numérica; por lo tanto se está hablando de una constante arbitraria.
Por lo que la solución correcta es

$$a$$

2. A siete se le aumenta un número cualquiera

Solución

a siete	7
se le aumenta	$7 +$
un numero cualquiera	$7 + a$
	$7 + a$

3. La suma de dos números cualesquiera

Solución

La suma	$+$
de dos números cualesquiera	$a + b$
	$a + b$

4. A cuatro se le excede el triple de un número

Solución

a cuatro	4
se le excede	$4 +$
El triple de un numero cualquiera	$4 + 3a$
	$4 + 3a$

5. La raíz cuadrada de la adición de dos números

Solución

La raíz cuadrada	$\sqrt{\square}$
de la adición	$\sqrt{\quad + \quad}$
de dos números	$\sqrt{a + b}$
	$\sqrt{a + b}$

Ejercicios

Traducir de lenguaje común a lenguaje algebraico.

1. La mitad de un número.
2. La cuarta parte de la suma de dos números.
3. Las dos quintas partes de un número aumentado en diez es igual a el cuadrado de ese mismo número.
4. La suma de tres números enteros consecutivos es igual a ciento cinco.
5. La mitad del producto de un numero entero y su antecesor, más tres es igual a treinta.
6. La suma de tres números enteros pares

7. La diferencia de tres números impares al cuadrado cada uno.
8. El área de un triángulo, si su base es la mitad de su altura.
9. Un número de dos cifras, cuyo digito de las decenas es el doble del de las unidades.
10. La suma de la mitad de un número más el triple de ese número es igual al reciproco de ese mismo número aumentado en siete.

1.1.5 Convertir de lenguaje algebraico a lenguaje común

Es traducir de lenguaje algebraico a lenguaje natural.

Ejemplos

Traducir los siguientes ejercicios en lenguaje algebraico a lenguaje natural.

1. $a - b$

Solución

$-$	*la diferencia*
$a - b$	*de dos números*
	La diferencia de dos números

2. $(a + b)^2$

Solución

$\square^2$	*el cuadrado*
$(\ \ +\ \ )^2$	*de la suma*

$(a+b)^2$	*de dos números*
	El cuadrado de la suma de dos números

3. $a-\frac{a}{4}$

Solución

$-$	*la diferencia*
$a-$	*de un número*
$a-\frac{a}{4}$	*y su cuarta parte*
	La diferencia de un número y su cuarta parte

Ejercicios

1. $\frac{a-1}{a}$

2. $\sqrt[3]{a^2+b^2}$

3. $\left(\frac{a}{a+1}\right)^4$

4. $\frac{2}{7}(a+b)^2-(a-1)=14$

5. $\frac{(a+b)^5}{a-b}+(a-1)-(b-1)=2$

1.2 Leyes de los exponentes y los radicales

Se sabe que el exponente de un número es determinar la multiplicación de ese número una cantidad de veces igual al exponente, por ejemplo

$$2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$$

El exponente se escribe como súper índice; al número que se eleva al exponente se le llama base, de tal forma que

$$\underbrace{a}_{base}{}^{n \rightarrow exponente}$$

También existen los radicales o raíces, que consisten en determinar el número que multiplicado una cierta cantidad de veces, especificada por la raíz, da como resultado el número al cual se le aplica la raíz, por ejemplo

$$\sqrt[3]{125} = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$$

A la cantidad a la cual se le aplica la raíz se llama base, de modo que

$$\text{raíz } n\text{–esima} \leftarrow \sqrt[n]{a} \rightarrow base$$

En álgebra existen leyes que aplican a exponentes y radicales, que son

Leyes de los exponentes	Leyes de los radicales
1. $a^m a^n = a^{m+n}$	1. $\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = a^{\frac{m}{n}}$
2. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ con $a \neq 0$	2. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$
3. $(a^m)^n = a^{mn}$	3. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ con $b \neq 0$
4. $(ab)^n = a^n b^n$	4. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a^k}} = \sqrt[mn]{a^k} = \left(a^{\frac{k}{n}}\right)^{\frac{1}{m}}$
5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$ con $b \neq 0$	5. $\sqrt[n]{0} = 0$

6. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ con $a \neq 0$	6. $\sqrt[par]{-a} = \sqrt[par]{a}\, i$
7. $a^0 = \frac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = 1$ con $a \neq 0$	7. $\sqrt[impar]{-a} = -\sqrt[impar]{a}$
8. $a^{\infty} = \infty$	8. $\sqrt[n]{\infty} = \infty$
9. $a^{-\infty} = 0$	
10. $0^{\infty} = 0$	
11. $0^{-\infty} = \infty$	
12. $1^{\pm\infty} = 1$	

Ejemplos

Reducir a su mínima expresión usando leyes de exponentes y radicales.

1. $(a^2b^4)^5$

Solución

$$(a^2b^4)^5$$ Se aplica $(ab)^n = a^n b^n$

$$= (a^2)^5(b^4)^5$$ Se aplica $(a^m)^n = a^{mn}$

$$= a^{10}b^{20}$$

2. $\sqrt[4]{\frac{x^5}{y^3}}$

Solución

$$\sqrt[4]{\frac{x^5}{y^3}}$$ Se aplica $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

$$=\left(\frac{x^5}{y^3}\right)^{\frac{1}{4}}$$ *Se aplica* $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$

$$=\frac{(x^5)^{\frac{1}{4}}}{(y^3)^{\frac{1}{4}}}$$ *Se aplica* $(a^m)^n=a^{mn}$

$$=\frac{x^{\frac{5}{4}}}{y^{\frac{3}{4}}}$$ *Por lo tanto*

$$=\frac{x^{\frac{5}{4}}}{y^{\frac{3}{4}}}$$

Ejercicios

Reducir a su mínima expresión usando leyes de exponentes y radicales.

1. $\frac{(a^2b^3c^4d^5)^7}{(a^3b^2d^4)^5}$

2. $\frac{\sqrt[3]{(x^4y^2z^3)^9}}{\sqrt[4]{x^2y^3}}$

3. $\sqrt{\frac{a^2b^{10}}{a^4c^5}}$

5. $\frac{1a^3\sqrt{a^2b}}{2}$

6. $\frac{\sqrt{(a^2+b^2)^3}}{a^2+b^2}$

7. $\frac{\frac{1}{2}\sqrt{(a+b)^3}(a+b)^4}{(a+b)^5}$

4. $$\frac{\sqrt[3]{a^5\ \sqrt[4]{b^3}}}{\sqrt{\sqrt[3]{a^2b^5}}}$$

8. $$\left[\frac{a^3b^5\ \sqrt[3]{a^2}\ \sqrt{c^4}}{\frac{4}{5}\left(a^2b^3\ \sqrt[3]{c^5}\right)^{\frac{4}{5}}}\right]^{\frac{2}{5}}$$

1.3 Logaritmos

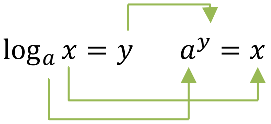
El logaritmo base a de x se define como

$$\log_a x = y$$

donde

- $a > 0$ y diferente de 1
- $x > 0$ y
- $y \in \mathbb{R}$

Significa que se determinará un exponente y de la base a y que dará como resultado x; es decir



$$\log_a x = y \qquad a^y = x$$

Es decir, $\log_a x = y$ significa que a elevada a y es igual a x.

Ejemplos

Determinar los logaritmos

1. $\log_2 32$

Es igual a 5

Porque

$$2^5 = 32$$

2. $\log_5 50$

Es ≈ 2.4307

Porque

$$5^{2.4307} \approx 50$$

3. $\log_7 49$

Es igual a 2

Porque

$$7^2 = 49$$

Por lo tanto	*Por lo tanto*	*Por lo tanto*
$\log_2 32 = 5$	$\log_5 50 \approx 2.4307$	$\log_7 49 = 2$

Ejercicios

Determinar los logaritmos

1. $\log_3 27$
2. $\log_8 84$
3. $\log_9 500$

1.4 Operaciones matemáticas básicas con expresiones algebraicas

Básicamente, una expresión algebraica está formada por coeficiente, variable y exponente; de la siguiente forma

$$ax^n$$

Donde

a es una constante llamada coeficiente
x es una variable
n es el exponente

Las expresiones algebraicas reciben un nombre dependiendo de la cantidad de elementos que formen en sumas o restas, por ejemplo

ax^n	monomio
$a_1x_1^{n_1} \pm a_2x_2^{n_2}$	binomio
$a_1x_1^{n_1} \pm a_2x_2^{n_2} \pm a_3x_3^{n_3}$	trinomio
$a_1x_1^{n_1} \pm a_2x_2^{n_2} \pm a_3x_3^{n_3} \pm a_4x_4^{n_4} \pm \cdots$	polinomio

Antes de aplicar las operaciones matemáticas a expresiones algebraicas, es necesario identificar los términos semejantes, estos son los que contienen las exactamente las mismas variables elevadas a sus respectivos exponentes, no importando el coeficiente, por ejemplo

$$2x^3y^4$$

es termino semejante de

$$\frac{1}{2}x^3y^4$$

porque ambos monomios contienen a x^3y^4

Ejercicios

Indicar los términos semejantes en los siguientes polinomios

1. $2a^2 + 4a^5 - 3a^2$
2. $3ab^2 - 2a^2b^2 + 5a^2b$
3. $5a^2bc + \frac{1}{2}ab^3 + 2bc - 3a^2bc$
4. $abc^3 - 2xy + 4abc + x^2y^2 + 5abc^3$
5. $2a_1b + 5ab - 3a_1b + 4a_1b$
6. $3a_1^2b_1^2 - 9a_2^2b_2^2$
7. $a^2b^3c^4 + 8b^3c^4 - 7a^2b^3c^4 + 2b^3c^4$

8. $5a^3b^2 + 5a^3b^2 - 2a^3b^2 - \dfrac{a^3b^2}{2}$

1.4.1 Suma y resta de expresiones algebraicas

En la suma y resta de expresiones algebraicas, se deben sumar o restar los coeficientes de los términos semejantes.

Ejemplos

Determinar las siguientes sumas y restas de polinomios.

1. $2a^2 + 4a^5 - 3a^2$

Solución

$$\underbrace{2a^2} + 4a^5 - \underbrace{3a^2}$$

Se suman los términos semejantes

$$(2-3)a^2 + 4a^5$$

$$-1a^2 + 4a^5$$

Por lo tanto

$$-a^2 + 4a^5$$

2. $5a^3b^2 + 5a^3b^2 - 2a^3b^2 - \dfrac{a^3b^2}{2}$

Solución

$$5a^3b^2 + 5a^3b^2 - 2a^3b^2 - \frac{a^3b^2}{2}$$

Se aplica $\frac{a}{b} = \frac{1}{b}a$

$$\underbrace{5a^3b^2} + \underbrace{5a^3b^2} - \underbrace{2a^3b^2} - \frac{1}{2}\underbrace{a^3b^2}$$

Se suman términos semejantes

$$\left(5+5-2-\frac{1}{2}\right)a^3b^2$$

$$\frac{15}{2}a^3b^2$$

Por lo tanto

$$\frac{15}{2}a^3b^2$$

Ejercicios

Determinar las siguientes sumas y restas de polinomios.

1. $2a^2b+4a^5b-3a^2b$

2. $3ab^2-2a^2b^2+5a^2b$

3. $5a^2bc+\frac{1}{2}ab^3+2bc-3a^2bc$

4. $abc^3-2xy+4abc+x^2y^2+5abc^3$

5. $2a_1b+5ab-3a_1b+4a_1b$

6. $3a_1^2b_1^2-9a_2^2b_2^2+43a_1^2b_1^2-2$

7. $a^2b^3c^4+8b^3c^4-\frac{7a^2b^3c^4}{2}+2b^3c^4$

8. $\frac{5a^3b^2}{4}+\frac{5a^3b^2}{7}-\frac{2a^3b^2}{5}-\frac{a^3b^2}{2}$

1.4.2 Multiplicación de expresiones algebraicas

En la multiplicación de expresiones algebraicas, se multiplican los coeficientes y se suman los exponentes de las variables correspondientes. No es necesario que sean términos semejantes.

Ejemplo

Multiplicar las siguientes expresiones.

1. $2a^2b^3(5a^4b^5)$

Solución

$2a^2b^3(5a^9b^7)$	*Se multiplican coeficientes* $2 \cdot 5$
$10[a^2b^3(a^9b^7)]$	*Se multiplican* $a^2 \cdot a^4$
$10a^{2+9}[b^3(b^7)]$	
$10a^{11}[b^3(b^7)]$	*Se multiplican* $b^3 \cdot b^7$
$10a^{11}b^{3+7}$	*Por lo tanto*
$10a^{11}b^{10}$	

Ejercicios

1. $(2a^2b)(4a^5b)(3a^2b)$

2. $(3ab^2)(2a^2b^2)(5a^2b)$

3. $(5a^2bc)\left(\frac{1}{2}ab^3\right)(2bc)(3a^2bc)$

4. $(abc^3)(2xy)(4abc)(x^2y^2)(5abc^3)$

5. $(2a_1b)(5ab)(3a_1b)(4a_1b)$

6. $(3a_1^2b_1^2)(9a_2^2b_2^2)(43a_1^2b_1^2)(2)$

7. $(a^2b^3c^4)(8b^3c^4)\left(\frac{7a^2b^3c^4}{2}\right)(2b^3c^4)$

8. $\left(\frac{5a^3b^2}{4}\right)\left(\frac{5a^3b^2}{7}\right)\left(\frac{2a^3b^2}{5}\right)\left(\frac{a^3b^2}{2}\right)$

1.4.3 División de expresiones algebraicas

La división puede representarse de distintas formas, como

$$\frac{a}{b}\ \begin{matrix}\rightarrow \mathit{numerador}\\ \rightarrow \mathit{denominador}\end{matrix} \qquad a \div b \qquad \mathit{divisor} \leftarrow \begin{array}{l} \square\ \underline{\;c\qquad\;} \\ b\,|a \\ \square\ \ d \end{array} \quad \begin{matrix}\rightarrow \mathit{cociente}\\ \rightarrow \mathit{dividendo}\\ \rightarrow \mathit{residuo}\end{matrix}$$

En este tema se tratará la división de polinomios. Las reglas de solución son las mismas que en los números reales.

Ejemplos

Determinar la siguiente fracción.

1. $\dfrac{4a^2b-2ab^2+5}{2ab^3}$

Solución

$$\frac{4a^2b-2ab^2+5}{2ab^3} \qquad \textit{Separando términos}$$

$$=\frac{4a^2b}{2ab^3}-\frac{2ab^2}{2ab^3}+\frac{5}{2ab^3} \qquad \textit{Se dividen los coeficientes}$$

$$= \frac{2a^2b}{a^1b^3} - \frac{ab^2}{ab^3} + \frac{5}{2ab^3} \qquad \text{Aplicando } \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$= \frac{2a^{2-1}}{b^{3-1}} - \frac{\cancel{a}}{\cancel{a}b^{3-2}} + \frac{5}{2ab^3}$$

$$= \frac{2a}{b^2} - \frac{1}{b} + \frac{5}{2ab^3} \qquad \text{Por lo tanto}$$

$$= \frac{2a}{b^2} - \frac{1}{b} + \frac{5}{2ab^3}$$

Al dividir polinomios de esta forma se debe seguir lo siguiente.

1. Si se van a separar términos; siempre se separa la parte del numerador, nunca la del denominador.

$$\begin{array}{r} \text{numerador} \rightarrow \\ \text{denominador} \rightarrow \end{array} \frac{2ab^3}{4a^2b - 2ab^2 + 5} \neq \frac{2ab^3}{4a^2b} - \frac{2ab^3}{2ab^2} + \frac{2ab^3}{5}$$

2. Los sumandos del numerador no se pueden reducir con sumandos del denominador.

$$\begin{array}{r} \text{numerador} \rightarrow \\ \text{denominador} \rightarrow \end{array} \frac{2ab^3 + 3ab + 2}{ab^3 + 2ab + 1} \neq \frac{2\cancel{ab^3} + 3\cancel{ab} + 2}{\cancel{ab^3} + 2\cancel{ab} + 1}$$

Para calcular la división de polinomios se siguen los pasos:

Paso 1. Verificar que el numerador sea mayor o igual que el denominador, esto es, si el exponente mayor de la variable se encuentra en el numerador, si esto ocurre entonces se continúa con el paso 2, si no, no se puede realizar la división.

Paso 2. Se divide en forma de fracción el sumando de mayor exponente del numerador con el sumando del mayor exponente del denominador y se coloca el resultado en la parte del cociente.

Paso 3. El resultado obtenido en el paso 2 se coloca en la parte del cociente y se multiplica por cada sumando del denominador y cambiando el signo, ya que se tiene que restar, y se coloca en la parte del residuo.

Paso 4. El resultado obtenido en el paso 3 se resta al dividendo o al residuo anterior.

Paso 5. Si el residuo es menor que el divisor, se detiene el procedimiento, si no, entonces se divide en forma de fracción el sumando de mayor exponente del residuo con el sumando del mayor exponente del denominador y se coloca el resultado en la parte del cociente se repiten los pasos 3 al 5.

Ejemplos

Determinar las siguientes divisiones.

2. $\dfrac{4a^3-2a^2-a+5}{2a^2+a-1}$

Solución

$$\frac{4a^3-2a^2-a+5}{2a^2+a-1}$$

Paso 1.

$$\begin{array}{r|l} \overset{\square}{\underset{\square}{2a^2+a-1}} & \overset{\square}{\overline{4a^3-2a^2-a+5}} \end{array}$$

Paso 2.

$$\begin{array}{r|l} \overset{\square}{\underset{\square}{2a^2+a-1}} & \overset{\square}{\overline{4a^3-2a^2-a+5}} \end{array} \qquad \frac{4a^3}{2a^2}=2a$$

Paso 3.

$$\begin{array}{r|l} & 2a \\ \hline 2a^2+a-1 & 4a^3-2a^2-a+5 \end{array}$$

Se multiplica

$2a(2a^2+a-1)$

Y se cambian los signos

$$\begin{array}{r|l} & 2a \\ \hline 2a^2+a-1 & 4a^3-2a^2-a+5 \\ & -4a^3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} & 2a \\ \hline 2a^2+a-1 & 4a^3-2a^2-a+5 \\ & -4a^3-2a^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} & 2a \\ \hline 2a^2+a-1 & 4a^3-2a^2-a+5 \\ & -4a^3-2a^2+2a \end{array}$$

Se suman o restan términos semejantes

Paso 4.

$$\begin{array}{r|l} & 2a \\ \hline 2a^2+a-1 & \cancel{4a^3}-2a^2-a+5 \\ & \cancel{-4a^3}-2a^2+2a \\ \hline & \qquad -4a^2+a+5 \end{array}$$

Paso 5.

$$\begin{array}{r|l} & 2a \\ \hline 2a^2+a-1 & \cancel{4a^3}-2a^2-a+5 \\ & \cancel{-4a^3}-2a^2+2a \\ \hline & \qquad -4a^2+a+5 \end{array}$$

$$\frac{-4a^2}{2a^2}=-2$$

$$\begin{array}{r|l} & 2a-2 \\ \hline 2a^2+a-1 & \cancel{4a^3}-2a^2-a+5 \\ & \cancel{-4a^3}-2a^2+2a \\ \hline & -4a^2+a+5 \end{array}$$

Se multiplica -2 *por* $2a^2+a-1$ *y se cambian los signos*

$$\begin{array}{r|l} & 2a-2 \\ \hline 2a^2+a-1 & \cancel{4a^3}-2a^2-a+5 \\ & \cancel{-4a^3}-2a^2+2a \\ \hline & -4a^2+a+5 \\ & 4a^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} & 2a-2 \\ \hline 2a^2+a-1 & \cancel{4a^3}-2a^2-a+5 \\ & \cancel{-4a^3}-2a^2+2a \\ \hline & -4a^2+a+5 \\ & 4a^2+2a \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} & 2a-2 \\ \hline 2a^2+a-1 & \cancel{4a^3}-2a^2-a+5 \\ & \cancel{-4a^3}-2a^2+2a \\ \hline & -4a^2+a+5 \\ & 4a^2+2a-2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} & 2a-2 \\ \hline 2a^2+a-1 & \cancel{4a^3}-2a^2-a+5 \\ & \cancel{-4a^3}-2a^2+2a \\ \hline & \cancel{-4a^2}+a+5 \\ & \underline{\cancel{4a^2}+2a-2} \end{array}$$

Se suman y restan términos semejantes

$$3a+3$$

Paso 5.

Se divide el residuo entre el denominador

$$\begin{array}{r|l} & 2a-2+\dfrac{3a+3}{2a^2+a-1} \\ 2a^2+a-1 & \overline{\cancel{4a^3}-2a^2-a+5} \\ & \underline{\cancel{-4a^3}-2a^2+2a} \\ & \qquad\cancel{-4a^2}+a+5 \\ & \qquad\underline{\cancel{4a^2}+2a-2} \\ & \qquad\qquad 3a+3 \end{array}$$

De aquí que el resultado es:

$$2a-2+\frac{3a+3}{2a^2+a-1}$$

3. $\dfrac{8a^4-2a^3+a^2+5a-2}{a^2-a+4}$

Solución

$$\frac{8a^4-2a^3+a^2+5a-2}{a^2-a+4}$$

Paso 1.

$$a^2-a+4\,\big|\,\overline{8a^4-2a^3+a^2+5a-2}$$

Paso 2.

$$a^2-a+4\,\big|\,\overline{8a^4-2a^3+a^2+5a-2} \qquad \frac{8a^4}{a^2}=8a^2$$

Paso 3.

$$\begin{array}{rl} \square & \,8a^2 \\ a^2-a+4 & \big|\overline{\,8a^4-2a^3+a^2+5a-2} \\ \square & \end{array}$$

Se multiplica

$8a^2(a^2-a+4)$

Y se cambian los signos

$$\begin{array}{rl} \square & \,8a^2 \\ a^2-a+4 & \big|\overline{\,8a^4-2a^3+a^2+5a-2} \\ \square & -8a^4 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \square & \,8a^2 \\ a^2-a+4 & \big|\overline{\,8a^4-2a^3+a^2+5a-2} \\ \square & -8a^4+8a^3 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \square & \,8a^2 \\ a^2-a+4 & \big|\overline{\,8a^4-2a^3+a^2+5a-2} \\ \square & -8a^4+8a^3-32a^2 \end{array}$$

Se suman o restan términos semejantes

Paso 4.

$$\begin{array}{rl} \square & \,8a^2 \\ a^2-a+4 & \big|\overline{\,\cancel{8a^4}-2a^3+a^2+5a-2} \\ \square & \underline{\cancel{-8a^4}+8a^3-32a^2} \\ \square & \qquad\quad 6a^3-31a^2+5a-2 \end{array}$$

Paso 5. El residuo es mayor que el denominador, por lo tanto se continúa con el paso la división.

$$\begin{array}{r|l} & 8a^2 \\ \hline a^2-a+4 & \cancel{8a^4}-2a^3+a^2+5a-2 \\ & \cancel{-8a^4}+8a^3-32a^2 \\ \hline & 6a^3-31a^2+5a-2 \end{array}$$

$$\frac{6a^3}{a^2}=6a$$

Paso3.

$$\begin{array}{r|l} & 8a^2+6a \\ \hline a^2-a+4 & 8a^4-2a^3+a^2+5a-2 \\ & -8a^4+8a^3-32a^2 \\ \hline & 6a^3-31a^2+5a-2 \end{array}$$

Se multiplica

$6a(a^2-a+4)$

Y se cambian los signos

$$\begin{array}{r|l} & 8a^2+6a \\ \hline a^2-a+4 & \cancel{8a^4}-2a^3+a^2+5a-2 \\ & \cancel{-8a^4}+8a^3-32a^2 \\ \hline & 6a^3-31a^2+5a-2 \\ & -6a^3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} & 8a^2+6a \\ \hline a^2-a+4 & \cancel{8a^4}-2a^3+a^2+5a-2 \\ & \cancel{-8a^4}+8a^3-32a^2 \\ \hline & 6a^3-31a^2+5a-2 \\ & -6a^3+6a^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} & 8a^2+6a \\ \hline a^2-a+4 & \cancel{8a^4}-2a^3+a^2+5a-2 \\ & \cancel{-8a^4}+8a^3-32a^2 \\ \hline & 6a^3-31a^2+5a-2 \\ & -6a^3+6a^2-24a \end{array}$$

Paso 4.

$$\begin{array}{r|l} & 8a^2+6a \\ \cline{2-2} a^2-a+4 & \cancel{8a^4}-2a^3+a^2+5a-2 \\ & \underline{\cancel{-8a^4}+8a^3-32a^2} \\ & \qquad \cancel{6a^3}-31a^2+5a-2 \\ & \qquad \underline{\cancel{-6a^3}+6a^2-24a} \\ & \qquad\qquad -25a^2-19a-2 \end{array}$$

Se suman o restan términos semejantes

Paso 5. El residuo es igual que el denominador, por lo tanto se continúa con la división

$$\begin{array}{r|l} & 8a^2+6a-25 \\ \cline{2-2} a^2-a+4 & \cancel{8a^4}-2a^3+a^2+5a-2 \\ & \underline{\cancel{-8a^4}+8a^3-32a^2} \\ & \qquad \cancel{6a^3}-31a^2+5a-2 \\ & \qquad \underline{\cancel{-6a^3}+6a^2-24a} \\ & \qquad\qquad -25a^2-19a-2 \end{array}$$

$$\frac{-25a^2}{a^2} = -25$$

Paso 3.

$$\begin{array}{r|l} & 8a^2+6a-25 \\ \cline{2-2} a^2-a+4 & \cancel{8a^4}-2a^3+a^2+5a-2 \\ & \underline{\cancel{-8a^4}+8a^3-32a^2} \\ & \qquad \cancel{6a^3}-31a^2+5a-2 \\ & \qquad \underline{\cancel{-6a^3}+6a^2-24a} \\ & \qquad\qquad -25a^2-19a-2 \\ & \qquad\qquad 25a^2 \end{array}$$

Se multiplica -25 por $a^2 - a + 4$ y se cambian los signos

$$
\begin{array}{r|l}
 & 8a^2+6a-25 \\ \hline
a^2-a+4 & \cancel{8a^4}-2a^3+a^2+5a-2 \\
 & \underline{-\cancel{8a^4}+8a^3-32a^2} \\
 & \cancel{6a^3}-31a^2+5a-2 \\
 & \underline{-\cancel{6a^3}+6a^2-24a} \\
 & -25a^2-19a-2 \\
 & 25a^2-25a
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 8a^2+6a-25 \\ \hline
a^2-a+4 & \cancel{8a^4}-2a^3+a^2+5a-2 \\
 & \underline{-\cancel{8a^4}+8a^3-32a^2} \\
 & \cancel{6a^3}-31a^2+5a-2 \\
 & \underline{-\cancel{6a^3}+6a^2-24a} \\
 & -25a^2-19a-2 \\
 & 25a^2-25a+100
\end{array}
$$

Paso 4.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 8a^2+6a-25 \\ \hline
a^2-a+4 & \cancel{8a^4}-2a^3+a^2+5a-2 \\
 & \underline{-\cancel{8a^4}+8a^3-32a^2} \\
 & \cancel{6a^3}-31a^2+5a-2 \\
 & \underline{-\cancel{6a^3}+6a^2-24a} \\
 & -\cancel{25a^2}-19a-2 \\
 & \underline{\cancel{25a^2}-25a+100} \\
 & -44a+98
\end{array}
$$

Se suman o restan términos semejantes

Paso 5.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 8a^2+6a-25+\dfrac{-44a+98}{a^2-a+4} \\
a^2-a+4 & \cancel{8a^4}-2a^3+a^2+5a-2 \\
 & \underline{\cancel{-8a^4}+8a^3-32a^2} \\
 & \qquad \cancel{6a^3}-31a^2+5a-2 \\
 & \qquad \underline{\cancel{-6a^3}+6a^2-24a} \\
 & \qquad\qquad \cancel{-25a^2}-19a-2 \\
 & \qquad\qquad \underline{\cancel{25a^2}-25a+100} \\
 & \qquad\qquad\qquad -44a+98
\end{array}
$$

Como el residuo es menor que el denominador, se divide

$$\frac{-44a+98}{a^2-a+4}$$

Por lo tanto la solución es

$$8a^2+6a-25+\frac{-44a+98}{a^2-a+4}$$

Ejercicios

Determinar las siguientes divisiones.

1. $$\frac{3a^4-2a^2+2}{5a^2-1}$$

2. $$\frac{x^5-x^4+x^2-x+4}{x^2+x-2}$$

3. $$\frac{5y^7-2y^5+8y^3-9y^2}{2y^3-y}$$

4. $$\frac{b^8-b^7+b^5-b^4}{b^3+1}$$

5. $$\frac{7a^2+3a^3+1}{a^4-2a^2}$$

6. $$\frac{9a^4+3a^3-4a^2+a-1}{a^2+2a-1}$$

7. $$\frac{c^7+2c^5+4c^4+1}{4c^3-3c^2-1}$$

8. $$\frac{-4a^5-3a^3-2}{-5a^2-a-1}$$

1.5 Fórmula cuadrática

Sea el polinomio $ax^2 + bx + c = 0$, se define la ecuación cuadrática o fórmula general

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

donde

a, b y c son constantes.

La fórmula general se utiliza para determinar la solución o soluciones de una ecuación cuadrática. Se le llama discriminante a $b^2 - 4ac$.

Si $b^2 - 4ac > 0$, entonces	La ecuación cuadrática tiene dos soluciones reales y diferentes.
Si $b^2 - 4ac = 0$, entonces	La ecuación cuadrática tiene dos soluciones reales e iguales.
Si $b^2 - 4ac < 0$, entonces	La ecuación cuadrática tiene soluciones complejas.

1.5.1 Soluciones reales

Si el valor del discriminante es positivo o cero, entonces las soluciones son reales.

Ejemplos

Resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas usando la fórmula general.

1. $x^2 + 2x - 3 = 0$

Solución

La ecuación tiene la forma

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde

$$\underbrace{1}_{a}x^2\ \underbrace{+2}_{b}x\ \underbrace{-3}_{c} = 0$$

$$a = 1 \quad b = 2 \quad c = -3$$

Aplicando la formula general

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$ *Sustituyendo*

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(-3)}}{2(1)}$$ *Desarrollando las multiplicaciones*

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - (-12)}}{2}$$ *Leyes de los signos en* $-(-12) = 12$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2}$$ *Sumando* $4 + 12$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2}$$ *El discriminante es positivo.*
Se determina $\sqrt{16}$

$$x = \frac{-2 \pm 4}{2}$$ *Se aplica la suma y la resta*

$$x_1 = \frac{-2 + 4}{2} \qquad x_2 = \frac{-2 - 4}{2}$$

$$x_1 = \frac{2}{2} \qquad x_2 = \frac{-6}{2}$$

$$x_1 = 1 \qquad x_2 = -3$$

2. $x^2 - 2x + 1 = 0$

Solución

La ecuación tiene la forma

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde

$$\underbrace{1}_{a}x^2 \underbrace{-2}_{b}x \underbrace{+1}_{c} = 0$$

$$a = 1 \quad b = -2 \quad c = 1$$

Aplicando la formula general

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Sustituyendo

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(1)}}{2(1)}$$

Desarrollando las multiplicaciones

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2}$$

Restando $4 - 4$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{0}}{2}$$

El discriminante es cero.
Se determina $\sqrt{0} = 0$

$$x = \frac{2 \pm 0}{2}$$

Se aplica la suma y la resta

$$x_1 = \frac{2 + 0}{2} \qquad x_2 = \frac{2 - 0}{2}$$

$$x_1 = \frac{2}{2} \qquad x_2 = \frac{2}{2}$$

$$x_1 = 1 \qquad x_2 = 1$$

Ejercicios

Resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas usando la fórmula general.

1. $-2x^2 - 2x + 3 = 0$

2. $x^2 + 4x - 5 = 0$

3. $x^2 + \frac{1}{2}x - 5 = 0$

4. $\frac{x^2}{2} + 4x + 5 = 0$

5. $\frac{5x^2}{2} - \frac{7x}{8} - \frac{1}{2} = 0$

6. $-\frac{2}{7}x^2 - 2x + 3 = 0$

7. $x^2 - 8x + 7 = 0$

8. $\frac{x^2 + x - 5}{7} = 0$

1.5.2 Soluciones complejas

Si el valor del discriminante es negativo, entonces la solución es compleja; el resultado es un número complejo y su conjugado.

Se ampliarán los números complejos en álgebra lineal.

Ejemplo

Resolver la siguiente ecuación cuadrática usando la fórmula general.

1. $x^2 - 2x + 5 = 0$

Solución

La ecuación tiene la forma

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde

$$\underbrace{1}_{a}x^2 \underbrace{-2}_{b}x \underbrace{+5}_{c} = 0$$

$a = 1 \quad b = -2 \quad c = 5$

Aplicando la formula general

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Se sustituyen valores

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(5)}}{2(1)}$$

Se desarrollan las multiplicaciones

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2}$$

Se resta $4 - 20$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2}$$

El discriminante es negativo. Se separa en factores $-16 = 16(-1)$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{16(-1)}}{2}$$

Se aplica $\sqrt{16(-1)} = \sqrt{16}\,\sqrt{-1}$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{16}\,\sqrt{-1}}{2}$$

Se aplica $\sqrt{16} = 4$ *y* $\sqrt{-1} = i$

$$x = \frac{2 \pm 4\,i}{2}$$

Se separan términos

$$x = \frac{2}{2} \pm \frac{4}{2} i$$

Se dividen las fracciones

$$x = 1 \pm 2i$$

$$x_1 = 1 + 2i \qquad x_2 = 1 - 2i$$

De esta forma se obtiene como resultado un número complejo y su conjugado

Ejercicios

Resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas usando la fórmula general.

1. $-x^2 + x - 1 = 0$

2. $x^2 - 2x + 7 = 0$

3. $2x^2 - x + 2 = 0$

4. $\frac{1}{2}x^2 - x + 3 = 0$

5. $x^2 + \frac{x}{5} + 5 = 0$

6. $x^2 - x + \frac{9}{2} = 0$

7. $-x^2 + x - 1 = 0$

8. $\frac{-2x^2 + x - 5}{7} = 0$

1.6 Ecuaciones logarítmicas

Para determinar las soluciones de ecuaciones que involucran logaritmos, se siguen las leyes de los *logaritmos base a* y *logaritmos naturales o neperianos*.

Leyes de los logaritmos

Logaritmos base a		Logaritmo natural
1. $\log_a x = y$ es $a^y = x$	8. $a^{\log_a x} = x$	1. $\ln a^n = n \ln a$
2. $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$	9. $\log_a x = \ln x$	2. $\ln \mathrm{ab} = \ln \mathrm{a} + \ln \mathrm{b}$
3. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$	10. $\log_{10} x = \log x$	3. $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$
4. $\log_a x^n = n \log_a x$	11. $\log 1 = 0$	4. $\ln 0 = -\infty$
5. $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$	12. $\log_a a = 1$	5. $\ln(-a) = indet.$
6. $\log_a a^n = n$	13. $\log 0 = -\infty$	6. $\ln(\infty) = \infty$

7. $\log_a x = \dfrac{\log_c x}{\log_c a}$		

Se debe tener cuidado de no caer en errores como

$$\ln(x+y) = \ln x + \ln y \qquad \text{Error}$$

¡Esto es un error! Ya que no existe una ley de logaritmos que indique esta igualdad para simplificarlo, por lo tanto

$$\ln(x+y) \neq \ln x + \ln y \qquad \text{correcto}$$

Ejemplos

Aplicar leyes de los logaritmos a los siguientes ejemplos.

1. $\log_a \dfrac{b}{cd}$

Solución

$$\log_a \frac{b}{cd}$$

Se aplica

$$log_a \frac{x}{y} = log_a x - log_a y$$

$$\log_a \frac{b}{cd} = \log_a b - \underbrace{\log_a cd}_{}$$

Se aplica

$$log_a xy = log_a x + log_a y$$

$$\log_a \frac{b}{cd} = \log_a b - (\log_a c + \log_a d)$$

Se desarrolla

$$-(log_a c + log_a d)$$

$$\log_a \frac{b}{cd} = \log_a b - \log_a c - \log_a d$$

Por lo tanto

$$\log_a \frac{b}{cd} = \log_a b - \log_a c - \log_a d$$

2. $\log_a \frac{\sqrt[3]{b^2+2}}{c^5}$

Solución

$$\log_a \frac{\sqrt[3]{b^2+2}}{c^5}$$

Se aplica

$$log_a \frac{x}{y} = log_a x - log_a y$$

$$\log_a \frac{b}{cd} = \log_a \underbrace{\sqrt[3]{b^2+2}} - \log_a c^5$$

Se aplica

$$\sqrt[3]{b^2+2} = (b^2+2)^{\frac{1}{3}}$$

$$\log_a \frac{b}{cd} = \underbrace{\log_a (b^2+2)^{\frac{1}{3}}} - \underbrace{\log_a c^5}$$

Se aplica

$$log_a x^n = n\, log_a x$$

$$\log_a \frac{b}{cd} = \frac{1}{3}\log_a (b^2+2)^{\frac{1}{3}} - 5\log_a c$$

Por lo tanto

$$\log_a \frac{b}{cd} = \frac{1}{3}\log_a (b^2+2)^{\frac{1}{3}} - 5\log_a c$$

Ejercicios

Aplicar leyes de logaritmos a los siguientes ejercicios

1. $\log_a \frac{b^2}{(cd)^3}$

2. $\log_a \sqrt{\frac{b^5}{\sqrt{cd}}}$

5. $\log_a \left[\left(\frac{b}{cd}\right)^4 (b^2+1)\right]$

6. $\log_a \sqrt{\left(\frac{b}{cd}\right)^2 + b}$

3. $\log_a \left[\frac{b}{cd}\right]^7$

4. $\log_a \left[\left(\frac{b}{cd}\right)\left(\frac{e}{f}\right)\right]$

7. $\log_a \left[\left(\frac{bc}{d}\right)^2 (d^2 - 2)\right]^2$

8. $\log_a \left[\frac{(b+c)^3\ \sqrt{(c-b)}}{(b-c)^3}\right]^2$

Estas leyes se aplican para dar solución a funciones logarítmicas como se explica en los siguientes ejemplos.

Ejemplos

Determinar el valor de x en los siguientes ejemplos.

1. $\log_5(x+4) = 2$

Solución

$$\log_5(x+4) = 2$$

Se aplica $\log_a x = y$ *que significa* $a^y = x$

$$5^2 = x + 4$$

Se desarrolla $5^2 = 25$

$$25 = x + 4$$

Se despeja x

$$25 - 4 = x$$

Se resta $25 - 4$

$$21 = x$$

Esto significa que si se sustituye $x = 21$ en $\log_5(x+4) = 2$ se cumple con el logaritmo.

2. $\log_4(5x-3) = \log_4(x+1)$

Solución

$$\log_4(5x-3) = \log_4(x+1)$$

Se aplica $\log_a x = y$ *que significa* $a^y = x$

$$4^{\log_4(x+1)} = 4^{\log_4(5x-3)} \qquad \text{Se aplica } a^{\log_a x} = x$$

$$x + 1 = 5x - 3 \qquad \text{Se despeja } x$$

$$1 + 3 = 5x - x$$

$$4 = 4x$$

$$\frac{4}{4} = x$$

$$1 = x$$

Por lo tanto si se sustituye $\mathrm{x} = 1$ en $\log_4(5\mathrm{x} - 3) = \log_4(\mathrm{x} + 1)$ se cumple con la igualdad

Ejercicios

Determinar el valor de x en los siguientes ejercicios.

1. $\log_4 x = \log_4(7 - x)$

2. $\log_5(2x - 3) = \log_5(1 - x)$

3. $\log(-5 - x) = \log(x - 2)$

4. $\log_9(x + 3) = \dfrac{1}{4}$

5. $\ln x^3 = 4$

6. $\ln(x + 1) = \ln(2 + x)$

7. $e^{x \ln 5} = 50$

8. $e^{x \ln 2} = \dfrac{1}{4}$

1.7 Desarrollo de Productos de polinomios

1.7.1 Multiplicación de polinomios

La multiplicación de polinomios se define como

$$(a_1x^n \pm b_1x^{n-1} \pm c_1x^{n-2} \pm \cdots)(a_2x^n \pm b_2x^{n-1} \pm c_2x^{n-2} \pm \cdots)$$

$$= a_1x^n(a_2x^n \pm b_2x^{n-1} \pm c_2x^{n-2} \pm \cdots)$$
$$\pm b_1x^{n-1}(a_2x^n \pm b_2x^{n-1} \pm c_2x^{n-2} \pm \cdots)$$
$$\pm c_1x^{n-2}(a_2x^n \pm b_2x^{n-1} \pm c_2x^{n-2} \pm \cdots) \pm \cdots =$$

$$= a_1a_2x^{n+n} \pm a_1b_2x^{n+(n-1)} \pm a_1c_2x^{n+(n-2)} \pm \cdots$$
$$\pm b_1a_2x^{(n-1)+n} \pm b_1b_2x^{(n-1)+(n-1)} \pm b_1c_2x^{(n-2)+(n-2)} \pm \cdots$$
$$\pm c_1a_2x^{(n-2)} \pm c_1b_2x^{(n-2)+(n-1)} \pm c_1c_2x^{(n-2)+(n-2)}$$

donde

a, b y c son constantes.

Ejemplos

Desarrollar la siguiente multiplicación.

1. $2x^2y(5x^3y^2 - x + 1)$

Solución

$$2x^2y(5x^3y^2 - x + 1)$$

Se multiplica y se aplican leyes de los exponentes

$$= 2x^2y(5x^3y^2) + 2x^2y(-x) + 2x^2y(1)$$
$$= 10x^{2+3}y^{1+2} - 2x^{2+1}y + 2x^2y$$
$$= 10x^5y^3 - 2x^3y + 2x^2y$$

2. $(2a - 3b)(-4a^2 + 5b^3 - 7ab)$

Solución

$$(2a-3b)(-4a^2+5b^3-7ab)$$

Se multiplica y se aplican leyes de los exponentes

$$\begin{aligned}= \;& 2a(-4a^2)+2a(5b^3)+2a(-7ab)\\ & -3b(-4a^2)-3b(5b^3)-3b(-7ab)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}= \;& -8a^{1+2}+10ab^3-14a^{1+1}b\\ & 12a^2b-15b^{1+3}+21ab^{1+1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}= \;& -8a^3+10ab^3\overbrace{-14a^2b}\\ & \underbrace{12a^2b}-15b^4+21ab^2\end{aligned}$$

Términos semejantes

$$\begin{aligned}= -8a^3+10ab^3-2a^2b-15b^4\\ +21ab^2\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}= -8a^3+10ab^3-2a^2b-15b^4\\ +21ab^2\end{aligned}$$

Ejercicios

1. $(-x^2+2)(5x^2-4x+1)$
2. $(2a+4b)^2$
3. $(5a-9b+4)(2ab-5b-1)$
4. $(-4y+5)^3$
5. $(-4a-7ab+2)(5a-2ab)$
6. $(-9a+b)^2(-9a-1)$
7. $(7a^2-a)^2(2a^2-4a-1)^2$
8. $(-5a-4)^3(-a^2+1)^3$

1.7.2 Desarrollo de multiplicación de binomios conjugados $(\boldsymbol{a+b})(\boldsymbol{a-b})$

Existen dos alternativas para desarrollar $(a+b)(a-b)$, siendo

a) Desarrollando la multiplicación de binomios, como se vio en el tema *multiplicación de polinomios*; es decir,

$$(a+b)(a-b)$$

b) Aplicar productos notables, donde se tendrá como resultado el cuadrado del primer elemento, menos el cuadrado del segundo elemento.

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

A continuación se verán ejemplos aplicando productos notables.

Ejemplo

Aplicar productos notables al siguiente ejemplo.

1. $(x+2y)(x-2y)$

Solución

$$\left(\underbrace{x}_{a}+\underbrace{2y}_{b}\right)\left(\underbrace{x}_{a}-\underbrace{2y}_{b}\right)$$

donde

$$a=x \qquad b=2y$$

Se aplican productos notables

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ *Sustituyendo*

$(x+2y)(x-2y)=(x)^2-(2y)^2$ *Se desarrolla*

$(x+2y)(x-2y)=x^2-(2)^2y^2$

$(x+2y)(x-2y)=x^2-4y^2$ *Por lo tanto*

$$(x+2y)(x-2y)=x^2-4y^2$$

Ejercicios

Aplicar productos notables a los siguientes ejemplos.

1. $(3a-4b)(3a+4b)$
2. $(-5a+2b)(5a+2b)$
3. $(-2a+5b)(5b+2a)$
4. $(7a-8b)(-8b+7a)$

1.7.2 Desarrollo del producto de binomios con un término común $(a+b)(a+c)$

Existen dos alternativas para desarrollar $(a+b)(a+c)$, siendo

a) Desarrollando la multiplicación de binomios, como se vio en el tema *multiplicación de polinomios*; es decir,

$$(a+b)(a+c)$$

b) Aplicar productos notables, donde se tendrá como resultado el cuadrado del primer elemento, más la suma del segundo elemento de cada binomio por el primer elemento, más el producto del segundo elemento de cada binomio.

$$(a+b)(a+c)=a^2+(b+c)a+bc$$

A continuación se verán ejemplos aplicando productos notables.

Ejemplo

Aplicar productos notables al siguiente ejemplo.

1. $(x+2)(x-4)$

Solución

$$\left(\underbrace{x}_{a}\underbrace{+2}_{b}\right)\left(\underbrace{x}_{a}\underbrace{-4}_{c}\right)$$

donde

$a = x \qquad b = 2 \qquad c = -4$

Se aplican productos notables

$(a+b)(a+c) = a^2 + (b+c)a + bc$ *Sustituyendo*

$(x+2)(x-4) = (x)^2 + (2-4)x + (2)(-4)$ *Se desarrolla*

$(x+2)(x-4) = x^2 + (-2)x + (-8)$

$(x+2)(x-4) = x^2 - 2x - 8$ *Por lo tanto*

$(x+2)(x-4) = x^2 - 2x - 8$

Ejercicios

Aplicar productos notables a los siguientes ejemplos.

1. $(3a-4)(3a+5)$

2. $(-5a+2)(-5a+4)$

3. $(-2+5b)(5b-7)$

4. $(7a-8)(-9+7a)$

1.7.3 Desarrollo de binomios de la forma $(a+b)^2$

Existen dos alternativas para desarrollar los binomios de la forma $(a+b)^2$, siendo

a) Desarrollando la multiplicación de binomios, como se vio en el tema *multiplicación de polinomios*; es decir,

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$$

b) Aplicar productos notables, donde se tendrá como resultado el primer elemento elevado al cuadrado, más el doble del primer elemento por el segundo, más el cuadrado del segundo elemento.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

A continuación se verán ejemplos aplicando productos notables.

Ejemplos
Aplicar productos notables a los siguientes ejemplos.

1. $(-9x+4y)^2$

Solución

$$\left(\underbrace{-9x}_{a}\underbrace{+4y}_{b}\right)^{2\rightarrow n}$$

donde

$a = -9x \qquad b = 4y \qquad n = 2$

Se aplican productos notables

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$ *Sustituyendo*

$$(-9x+4y)^2 = (-9x)^2 + 2(-9x)(4y) + (4y)^2$$ *Se desarrolla*

$$(-9x+4y)^2 = (-9)^2x^2 + 2(-36xy) + (4)^2y^2$$

$(-9x+4y)^2 = 81x^2 - 72xy + 16y^2$ *Por lo tanto*

$$(-9x+4y)^2 = 81x^2 - 72xy + 16y^2$$

2. $(x-2y)^2$

Solución

$$\left(\underbrace{x}_{a}\underbrace{-2y}_{b}\right)^{2\to n}$$

donde

$a = x \qquad b = -2y \qquad n = 2$

Se aplican productos notables

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ *Sustituyendo*

$(-9x+4y)^2 = (x)^2 + 2(x)(-2y) + (-2y)^2$ *Se desarrolla*

$(-9x+4y)^2 = x^2 + 2(-2xy) + (-2)^2y^2$

$(-9x+4y)^2 = x^2 - 4xy + 4y^2$ *Por lo tanto*

$$(-9x+4y)^2 = x^2 - 4xy + 4y^2$$

Ejercicios

Aplicar productos notables.

1. $(5a+3b)^2$

2. $(-2a+7b)^2$

3. $(4a^2 - 5b^4)^2$

4. $(-10a^4 - 5b^5)^2$

1.7.4 Desarrollo de binomios de la forma $(a + b)^3$

Existen dos alternativas para desarrollar los binomios de la forma $(a + b)^3$, siendo

a) Desarrollando la multiplicación de binomios, como se vio en el tema *multiplicación de polinomios*; es decir,

$$(a + b)^3 = (a + b)(a + b)(a + b)$$

b) Aplicar productos notables, donde se tendrá como resultado el primer elemento elevado al cubo, más el triple del primer elemento al cuadrado por el segundo, más el triple del primer elemento por el cuadrado del segundo elemento, más el cubo del segundo elemento.

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

A continuación se verán ejemplos aplicando productos notables.

Ejemplos

Aplicar productos notables a los siguientes ejemplos.

1. $(-9x + 4y)^3$

Solución

$$\left(\underbrace{-9x}_{a}\,\underbrace{+4y}_{b}\right)^{3\to n}$$

donde

$$a = -9x \qquad b = 4y \qquad n = 3$$

Se aplican productos notables

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(-9x + 4y)^3 = (-9x)^3 + 3(-9x)^2(4y) + 3(-9x)(4y)^2 + (4y)^3$$

$$(-9x + 4y)^3 = (-9)^3x^3 + 3[(-9)^2x^2](4y) + 3(-9x)(4)^2y^2 + (4)^3y^3$$

$$(-9x + 4y)^3 = -729x^3 + 3(81x^2)(4y) + 3(-9x)(16)y^2 + 64y^3$$

$$(-9x + 4y)^3 = -729x^3 + 972x^2y - 432xy^2 + 64y^3$$

$$(-9x + 4y)^3 = -729x^3 + 972x^2y - 432xy^2 + 64y^3$$

2. $(x - 2y)^3$

Solución

$$\left(\underbrace{x}_{a}\underbrace{-2y}_{b}\right)^{3 \to n}$$

donde

$$a = x \qquad b = -2y \qquad n = 3$$

Se aplican productos notables

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(-9x + 4y)^3 = x^3 + 3x^2(-2y) + 3x(-2y)^2 + (-2y)^3$$

$$(-9x + 4y)^3 = x^3 - 6x^2y + 3x(-2)^2y^2 + (-2)^3y^3$$

$$(-9x+4y)^3 = x^3 - 6x^2y + 3x(4)y^2 + (-8)y^3$$

$$(-9x+4y)^3 = x^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 8y^3$$

$$(-9x+4y)^3 = x^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 8y^3$$

Ejercicios

Aplicar productos notables.

1. $(5a+3b)^3$
2. $(-2a+7b)^3$
3. $(4a^2-5b^4)^3$
4. $(-10a^4-5b^5)^3$

1.7.5 Desarrollo de binomios de la forma $(a+b)^n$

Para desarrollar $(a+b)^n$ se puede realizar en tres formas; que son

a) Desarrollando la multiplicación de binomios,

$$(a+b)^n = (a+b)(a+b)(a+b)\cdots(a+b)$$

b) Desarrollar por medio del teorema de Newton,

$$
\begin{aligned}
(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 \\
+ \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \cdots \\
+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-r+2)}{(r-1)!}a^{n-r+1}b^{r+1}
\end{aligned}
$$

donde

$$r = 0,1,2,3,\ldots$$

c) Desarrollar con el triángulo de Pascal, el cual brinda los coeficientes de cada sumando del resultado.

$$
\begin{array}{ccccccccccccl}
 & & & & & & 1 & & & & & & n = 0 \\
 & & & & & \swarrow & & \searrow & & & & & \\
 & & & & 1 & & \square & & 1 & & & & n = 1 \\
 & & & \swarrow & & \searrow & & \swarrow & & \searrow & & & \\
 & & & 1 & \square & & 2 & & \square & 1 & & & n = 2 \\
 & & \swarrow & & \searrow & \swarrow & & \searrow & \swarrow & & \searrow & & \\
 & & 1 & \square & 3 & & \square & & 3 & \square & 1 & & n = 3 \\
 & \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & \swarrow & & \searrow & \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & \\
1 & \square & 4 & \square & & 6 & & \square & 4 & \square & 1 & & n = 4 \\
\swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & \square & &
\end{array}
$$

Estos coeficientes se multiplican por producto del decremento del exponente del primer elemento del binomio por el incremento del exponente del segundo elemento de binomio.

Ejemplo

Desarrollar con el teorema de Newton y con el triángulo de Pascal el siguiente ejemplo.

1. $(-x+4)^3$

Solución

$$\left(\underbrace{-x}_{a}\ \underbrace{+4}_{b}\right)^{3\rightarrow n}$$

Donde

$$a=-x \qquad b=4 \qquad n=3$$

Por el teorema de Newton

$$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3+\cdots+\frac{n(n-1)(n-2)(n-r+2)}{(r-1)!}a^{n-r+1}b^{r+1}$$

$$(-x+4)^3=(-x)^3+3(-x)^{3-1}(4)+\frac{3(3-1)}{2!}(-x)^{3-2}(4)^2+\frac{3(3-1)(3-2)}{3!}(-x)^{3-3}(4)^3$$

$$(-x+4)^3=-x^3+3(-x)^2(4)+\frac{3(2)}{2}(-x)^1(16)+\frac{3(2)(1)}{6}(-x)^0(64)$$

$$(-x+4)^3=-x^3+12x^2+\frac{6}{2}(-x)(16)+\frac{6}{6}(1)(64)$$

$$(-x+4)^3=-x^3+12x^2-3(16)x+1(1)(64)$$

$$(-x+4)^3=-x^3+12x^2-48x+64$$

$$(-x+4)^3=-x^3+12x^2-48x+64$$

Solución por triángulo de Pascal

$$\left(\underbrace{-x}_{a}\underbrace{+4}_{b}\right)^{3\to n}$$

Donde

$$a=-x \qquad b=4 \qquad n=3$$

Por el triángulo de Pascal

Como $n=3$, se determinan los coeficientes

$$1 \qquad n=0$$

$$1 \quad ⬚ \quad 1 \qquad n=1$$

$$1 \quad ⬚ \quad 2 \quad ⬚ \quad 1 \qquad n=2$$

$$1 \quad ⬚ \quad 3 \quad ⬚ \quad 3 \quad ⬚ \quad 1 \qquad n=3$$

Se colocan los coeficientes de la siguiente forma

$$(a+b)^3=1a^3+3a^2b+3ab^2+1b^3$$

$$(a+b)^3=(-x)^3+3(-x)^2(4)+3(-x)(4)^2+(4)^3$$

$$(a+b)^3=-x^3+12x^2-3x(16)+64$$

$$(a+b)^3=-x^3+12x^2-48x+64$$

$$(a+b)^3=-x^3+12x^2-48x+64$$

Ejercicios

Demostrar los siguientes ejercicios aplicando el teorema de Newton o triángulo de Pascal.

Ejercicio *Solución*

1. $(x+3)^3$ $\quad x^3+9x^2+27x+27$
2. $(x-5)^4$ $\quad x^4-20x^3+150x^2-500x+625$
3. $(x+7)^5$ $\quad x^7+35x^4+490x^3+3430x^2+12005x+16807$
4. $(-x+7)^3$ $\quad -x^3+21x^2-147x+343$
5. $(-x-2)^4$ $\quad x^4+8x^3+24x^2+32x+16$
6. $(-2x-4)^5$ $\quad -32x^5-320x^4-1280x^3-2560x^2-2560x-1024$
7. $(x^2-4)^4$ $\quad x^8-16x^6+94x^4-256x^2+256$
8. $(-x^4-4)^3$ $\quad x^{12}-12x^8+48x^4-64$

1.8 Factorización

Las factorizaciones son muy útiles para reducir polinomios a su mínima expresión, y para determinar las raíces (soluciones) de ecuaciones o funciones.

1.8.1 Factor Común

El factor común es el que se encuentra presente en varios o todos los elementos de un polinomio, por ejemplo

$$ab+ac-ad=a(b+c-d)$$

Donde claramente se ve que a es un factor común por encontrarse en todos los elementos del polinomio.

Ejemplos

Determinar el factor común en los siguientes ejemplos

1. $ab^2 + a^2b - a^2b^2$

Solución

Puede observarse que tanto a como b se encuentran en todos los elementos del polinomio; así que se toman como factor común los de menor exponente.

$$ab^2 + a^2b - a^2b^2$$

$$= ab(b + a - ab)$$

2. $10ab^2 - 15a^2b - 20a^2b^2$

Solución

Puede observarse que tanto a como b se encuentran en todos los elementos del polinomio; además, se observa que 5 es múltiplo de todos los coeficientes.

$$10ab^2 - 15a^2b - 20a^2b^2$$

$$= 5ab(2b - 3a - 4ab)$$

Ejercicios

Determinar el factor común de los siguientes ejercicios.

1. $5xy^2 - 2x^2y + 8x^2y^2$

2. $-4a^3b^3c^3 + 8a^2b^2c^2 - 12a^2bc^3$

3. $-x^2y^3z^4 + 4x^3y^4z^5 - 10x^2y^4 + 15x^2y$

4. $\dfrac{-5a^3 - 4abc - 8a^2b^2}{2a^2b + 4a^2b^2}$

1.8.2 Factorización de trinomios

Un trinomio que está formado por dos términos cuadráticos, que se encuentran en los extremos, y un término lineal, que se encuentra en el centro; es decir,

$$a^2 + 2ab + b^2 \qquad \text{o} \qquad a^2 - 2ab + b^2$$

Es posible factorizarlo por alguno de los siguientes métodos.

1. Factorización de trinomio cuadrado perfecto.
2. Factorización general de trinomios.
3. Factorización por fórmula general.

Nota: Si el trinomio que se desea factorizar no está escrito en la forma $a^2 + 2ab + b^2$, entonces, por comodidad, deberá escribirse en este orden.

1.8.2.1 Factorización de trinomios cuadrados perfectos $a^2 + 2ab + b^2$ como binomios al cuadrado $(a + b)^2$

Un trinomio que tiene las formas

$$a^2 + 2ab + b^2 \qquad \text{o} \qquad a^2 - 2ab + b^2$$

Se pueden factorizar como

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 \qquad \text{o} \qquad a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

Respectivamente. Para determinar si un trinomio cumple con alguna de estas formas se recomienda seguir el método que a continuación se propone.

Paso 1. De terminar la raíz cuadrada de a^2 y de b^2.

Paso 2. Se obtiene el doble producto de a por b; es decir,

$$2ab.$$

Paso 3. Se compara el resultado obtenido en el paso 2 con el término lineal del trinomio. Si son iguales, entonces se continúa con el paso 4, si no, entonces no es un trinomio cuadrado perfecto.

Paso 4. Se escribe

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2 \qquad \text{o} \qquad a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$$

Ejemplos

Factorizar los trinomios.

1. $x^2 + 10x + 25$

Solución

$$\underbrace{x^2}_{a^2} + 10x + \underbrace{25}_{b^2}$$

Paso 1.

$$a^2 = x^2 \qquad b^2 = 25 \qquad \textit{Se aplica raíz cuadrada}$$

$$a = \sqrt{x^2} \qquad b = \sqrt{25}$$

$$a = x \qquad b = 5$$

Paso 2.

$$2ab \qquad \textit{Sustituyendo}$$

$$2ab = 2(x)(5)$$

$$2ab = 10x$$

Paso 3.

$$\mathrm{x}^2 + \underbrace{10\mathrm{x}} + 25 \qquad \textit{Se compara}$$

Paso 4.

$$x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2$$

2. $10000x^2 - 200x + 1$

Solución

$$\underbrace{10000x^2}_{a^2} - 200x + \underbrace{1}_{b^2}$$

Paso 1.

$a^2 = 10000x^2$ $\quad$ $b^2 = 1$ $\quad$ *Se aplica raíz cuadrada*

$a = \sqrt{10000x^2}$ $\quad$ $b = \sqrt{1}$

$a = 100x$ $\quad$ $b = 1$

Paso 2.

$2ab$ $\quad$ *Sustituyendo*

$2ab = 2(100x)(1)$

$2ab = 200x$

Paso 3.

$$10000x^2 - \underbrace{200x} + 1$$ *Se compara*

Paso 4.

$$10000x^2 - 200x + 1 = (100x - 1)^2$$

Ejercicios

Factorizar los siguientes ejercicios.

1. $25x^2 - 30x + 9$

2. $100x^2 - 100x + 25$

5. $25x^4 - 10\sqrt{2}\,x^2 + 2$

6. $81x^4 - 18\sqrt{2}\,x^2y^5 + 2y^{10}$

3. $81x^2 + 126x + 49$

4. $x^4 - 18x^2 + 81$

7. $9a^4b^{10} + 12a^4b^9 + 4a^4b^8$

8. $(a^2 + 2ab + b^2)x^2 - 4(a - b)x + 4$

1.8.2.2 Factorización de trinomios de la forma $x^2 \pm bx \pm c$ o $a^2x^2 \pm bx \pm c$ como factores con término común $(x \pm d)(x \pm e)$

Un trinomio que tiene las formas

$$x^2 \pm bx \pm c \qquad \text{o} \qquad x^2 \pm bx \pm c$$

Se puede factorizar como

$$x^2 \pm bx \pm c = (x \pm d)(x \pm e) \qquad \text{o} \qquad ax^2 \pm bx \pm c = (mx \pm k)(nx \pm l)$$

Respectivamente. Para factorizar un trinomio de cualquiera de estas formas se recomienda seguir el método que a continuación se propone.

	Para $x^2 \pm bx \pm c$	Para $ax^2 \pm bx \pm c$

Paso 1.	Se determina la raíz cuadrada de x^2 Y se coloca el resultado en ambos factores $(x \quad)(x \quad)$	Se multiplica y se divide por el coeficiente del termino cuadrático $\frac{a(ax^2 \pm bx \pm c)}{a}$ De tal forma que se escribe $\frac{(ax)^2 \pm b(ax) \pm ac}{a}$
Paso 2.	Se coloca el signo de b en el primer factor $(x \pm \quad)(x \quad)$ Se multiplica el signo de b por el signo de c y se coloca en el segundo factor $(x \pm \quad)(x \pm \quad)$	Se determina la raíz cuadrada de $(ax)^2$ Y se coloca el resultado en ambos factores $\frac{(ax \quad)(ax \quad)}{a}$
Paso 3.	Se determinan dos cantidades d, e que al multiplicarse den como resultado c y al sumarse den como resultado b. Se coloca la cantidad mayor en el primer factor y la menor en el segundo factor. $(x \pm d)(x \pm e)$	Se coloca el signo de b en el primer factor $\frac{(ax \pm \quad)(ax \quad)}{a}$ Se multiplica el signo de b por el signo de ac y se coloca en el segundo factor $\frac{(ax \pm \quad)(ax \pm \quad)}{a}$
Paso 4.		Se determinan dos cantidades k, l que al multiplicarse den como resultado ac y al sumarse den como resultado b. Se coloca la cantidad mayor en el primer factor y la menor en el segundo factor. $\frac{(ax \pm k)(ax \pm l)}{a}$

Paso 5.		Se determina el factor común de cada binomio del numerador $\frac{f_1(mx \pm k)f_2(nx \pm l)}{a}$
Paso 6.		Se multiplican los factores comunes $\frac{f_1 \cdot f_2(x \pm k)(x \pm l)}{a}$ Y se simplifica
Paso 7.		Se escribe el resultado $ax^2 \pm bx \pm c = (mx \pm k)(nx \pm l)$

Ejemplos

Factorizar los siguientes trinomios.

1. $x^2 - 2x - 8$

Solución

$$x^2 - 2x - 8$$

Es de la forma $x^2 \pm bx \pm c$ *donde*

$$\underbrace{x^2}_{x^2}\underbrace{-2}_{b}\,x\underbrace{-8}_{c}$$

$$x^2 = x^2 \qquad b = -2 \qquad c = -8$$

Paso 1. Se determina la raíz cuadrada de x^2

$$x^2 = x^2$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{x^2}$$

$$x = x$$

Y se coloca el resultado en ambos factores

$$(x\quad)(x\quad)$$

Paso 2. Se coloca el signo de b en el primer factor

$$(x-\quad)(x\quad)$$

Se multiplica el signo de b por el signo de c y se coloca en el segundo factor

$$(-)(-)=+$$

$$(x-\quad)(x+\quad)$$

Paso 3. Se determinan dos cantidades d, e que al multiplicarse den como resultado c y al sumarse den como resultado b.

$d \cdot e = c$	$d + e = b$	
$1(-8)=-8$	$1+(-8)=-7$	✗
$-1(8)=-8$	$-1+8=-7$	✗
$2(-4)=-8$	$2+(-4)=-2$	✓
$-2(4)=-8$	$-2+4=2$	✗

Se coloca la cantidad mayor en el primer factor y la menor en el segundo factor.

$$(x-4)(x+2)$$

Por lo tanto

$$x^2-2x-8=(x-4)(x+2)$$

2. $20x^2-11x-3$

Solución

$$20x^2-11x-3$$

Es de la forma $ax^2 \pm bx \pm c$ donde

$$\underbrace{20x^2}_{ax^2}\underbrace{-11}_{b}x\underbrace{-3}_{c}$$

Paso 1. Se multiplica y se divide por el coeficiente del término cuadrático

$$\frac{20(20x^2 - 11x - 3)}{20}$$

De tal forma que se escribe

$$\frac{(20x)^2 - 11(20x) - 60}{20}$$

donde

$$x^2 = (20x)^2 \quad x = 20x \quad b = -11 \quad c = -60$$

Paso 2. Se determina la raíz cuadrada de $(20x)^2$

$$x^2 = (20x)^2$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{(20x)^2}$$

$$x = 20x$$

y se coloca el resultado en ambos factores

$$\frac{(20x \qquad)(20x \qquad)}{20}$$

Paso 3. Se coloca el signo de b *en el primer factor*

$$\frac{(20x - \qquad)(20x \qquad)}{20}$$

Se multiplica el signo de b *por el signo de* c *y se coloca en el segundo factor*

$$(-)(-) = +$$

$$\frac{(20x - \qquad)(20x + \qquad)}{20}$$

Paso 4. Se determinan dos cantidades k, l *que al multiplicarse den como resultado* c *y al sumarse den como resultado* b*.*

$$d \cdot e = c \qquad\qquad d + e = b$$

$1(-60)=-60$	$1+(-60)=-59$	✗
$-1(60)=-60$	$-1+60=59$	✗
$3(-20)=-60$	$3+(-20)=-17$	✗
$-3(20)=-60$	$-3+20=17$	✗
$5(-12)=-60$	$5+(-12)=-7$	✗
$-5(12)=-60$	$-5+12=7$	✗
$6(-10)=-60$	$6+(-10)=-4$	✗
$-6(10)=-60$	$-6+10=4$	✗
$15(-4)=-60$	$15+(-4)=11$	✗
$-15(4)=-60$	$-15+4=-11$	✓

Se coloca la cantidad mayor en el primer factor y la menor en el segundo factor.

$$\frac{(20x-15)(20x+4)}{20}$$

Paso 5. Se determina el factor común de cada binomio del numerador

$$\frac{5(4x-3)4(5x+1)}{20}$$

Paso 6. Se multiplican los factores comunes

$$\frac{20(4x-3)(5x+1)}{20}$$

Y se simplifica

$$(4x-3)(5x+1)$$

Paso 7. Se escribe el resultado

$$20x^2-11x-3=(4x-3)(5x+1)$$

Ejercicios

Demostrar las factorizaciones.

	Ejercicio	*Solución*
1.	$x^2 - 5x - 14$	$(x+2)(x-7)$
2.	$-20x^2 - 43x - 14$	$(5x+2)(-4x-7)$
3.	$x^2 - 17x + 72$	$(-x+9)(-x+8)$
4.	$9x^2 - 21x + 12$	$(-3x+4)(-3x+3)$
5.	$-8x^2 + 29x - 15$	$(8x-5)(-x+3)$
6.	$35x^2 - 31x - 6$	$(-7x-2)(5x+3)$
7.	$18x^2 + 21x - 9$	$(2x+3)(9x-3)$
8.	$\frac{45x^2}{8} - \frac{7x}{16} - \frac{1}{10}$	$\left(\frac{5}{2}x + \frac{1}{4}\right)\left(\frac{9}{4}x - \frac{2}{5}\right)$

1.8.2.3 Factorización de trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$, por fórmula general

Un trinomio que tiene la forma

$$ax^2 \pm bx \pm c$$

Se puede factorizar como

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

De la siguiente forma.

Ejemplo

Factorizar el siguiente ejemplo por fórmula general.

1. $-36x^2 + 53x - 10$

Solución

$$-36x^2 + 53x - 10$$

Es de la forma

$$ax^2 \pm bx \pm c$$

Donde

$$\underbrace{-36}_{a}\, x^2 \underbrace{+53}_{b}\, x \underbrace{-10}_{c}$$

$a = -36$ $\quad b = 53$ $\quad c = -10$

Se aplica la fórmula genera

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Se sustituyen valores

$$x = \frac{-53 \pm \sqrt{(53)^2 - 4(-36)(-10)}}{2(-36)}$$

Se desarrollan las multiplicaciones

$$x = \frac{-53 \pm \sqrt{2809 - 4(360)}}{-72}$$

$$x = \frac{-53 \pm \sqrt{2809 - 1440}}{-72}$$

Se resta $2809 - 1440$

$$x = \frac{-53 \pm \sqrt{1369}}{-72}$$

Se determina $\sqrt{1369}$

$$x = \frac{-53 \pm 37}{-72}$$

Se suma y resta -53 ± 37

$$x_1 = \frac{-53 + 37}{-72} \qquad x_2 = \frac{-53 - 37}{-72}$$

$$x_1 = \frac{-16}{-72} \qquad x_2 = \frac{-90}{-72}$$

$$x_1 = \frac{2}{9} \qquad x_2 = \frac{5}{4}$$

Para igualar a cero cada ecuación

$$x = \frac{2}{9} \qquad x = \frac{5}{4}$$

$$9x = 2 \qquad 4x = 5$$

$$9x - 2 = 0 \qquad 4x - 5 = 0$$

Por lo tanto

$$-36x^2 + 53x - 10 = (9x - 2)(4x - 5)$$

Ejercicios

Demostrar las siguientes factorizaciones por fórmula general.

	Ejercicio	*Solución*
1.	$-20x^2 - 43x - 14$	$(5x + 2)(-4x - 7)$
2.	$-x^2 + 7x - 10$	$(x - 5)(-x + 2)$
3.	$x^4 + 4x^2 - 32$	$(x^2 - 4)(x^2 + 8)$

4. $-9x^8 + 27x^4y - 20y^2$ $\quad$ $(-3x^4 - 4y)(3x^4 - 5y)$

5. $5x^2 + x + 5$ $\quad$ $\left[x + \frac{1}{10} + \frac{3\sqrt{11}}{10}i\right]\left[x + \frac{1}{10} - \frac{3\sqrt{11}}{10}i\right]$

1.8.3 Completar el trinomio cuadrado perfecto

Para completar el cuadrado en las expresiones $x^2 + bx \pm c$ o $x^2 - bx \pm c$, se sigue

$$x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \pm c - \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 \pm c - \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

o $$x^2 - bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \pm c - \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{b}{2}\right)^2 \pm c - \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

Respectivamente.

Es decir; se suma y se resta el cuadrado de la mitad de b.

Ejemplo

Factorizar completando el trinomio cuadrado perfecto.

1. $x^2 - 5x + 2$

Solución

Se tiene

$$x^2 - \underbrace{5}_{b}x + \underbrace{2}_{c}$$

$$b = 5 \qquad\qquad c = 2$$

$$\frac{b}{2} = \frac{5}{2}$$

Se completa el trinomio cuadrado perfecto

$$x^2 - bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \pm c - \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$= \left(x - \frac{b}{2}\right)^2 \pm c - \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

Se sustituye

$$x^2 - 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 2 - \underbrace{\left(\frac{5}{2}\right)^2}$$

$$= \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + 2 - \underbrace{\left(\frac{5}{2}\right)^2}$$

Se desarrolla lo indicado

$$x^2 - 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 \underbrace{+2 - \frac{25}{4}} = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 \underbrace{+2 - \frac{25}{4}}$$

Se resta $2 - \frac{25}{4}$

$$x^2 - 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{17}{4} = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{17}{4}$$

Por lo tanto

$$x^2 - 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{17}{4} = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{17}{4}$$

Ejercicios

Factorizar completando el trinomio cuadrado perfecto.

1. $x^2 + x$

2. $x^2 - 2x$

5. $x^2 + 8x - 1$

6. $x^2 - \frac{2}{5}x - \frac{3}{4}$

3.	$x^2 + 4x - 5$	**7.**	$9x^2 + 10x - 11$
4.	$x^2 + 5x - 2$	**8.**	$\frac{1}{2}x^2 - \frac{4}{9}x + \frac{1}{5}$

1.8.4 Factorización por diferencia de cuadrados $a^2 - b^2$

Los binomios de la forma

$$a^2 - b^2$$

Se pueden factorizar como

$$(a + b)(a - b)$$

Como se muestra a continuación

Ejemplo

Factorizar el binomio por diferencia de cuadrados.

1. $x^2 - 4$

Solución

Se tiene

$$x^2 - 4$$

donde

$$\underbrace{x^2}_{a^2} - \underbrace{4}_{b^2}$$

$a^2 = x^2$ $\quad$ $b^2 = 4$ $\quad$ *Se aplica raíz cuadrada*

$\sqrt{a^2} = \sqrt{x^2}$ $\quad$ $\sqrt{b^2} = \sqrt{4}$

$$a = x \qquad\qquad b = 2$$

Luego se sustituye en

$$(a + b)(a - b) \qquad\qquad \textit{Se sustituyen valores}$$

$$(x + 2)(x - 2)$$

Por lo tanto

$$x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$$

Ejercicios

Factorizar por diferencia de cuadrados.

1. $x^2 - 9$
2. $4x^2 - 81$
3. $5x^2 - 2$
4. $-4x^2 + 3y$
5. $-2x^2 + y$
6. $x^2y^3 - 25$
7. $-x^4y^5 + xy$
8. $-ax^2y^2 + 9$

1.8.5 Factorización por diferencia o suma de cubos $a^3 - b^3$ o $a^3 + b^3$

Los binomios de la forma

$$a^3 + b^3 \qquad \text{o} \qquad a^3 - b^3$$

Se pueden factorizar como

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) \qquad \text{o} \qquad (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Respectivamente.

Ejemplo

Factorizar la diferencia o suma de cubos.

1. $x^3 + 27$

Solución

Se tiene

$$x^3 + 27$$

Donde

$$\underbrace{x^3}_{a^3} + \underbrace{27}_{b^3}$$

$$a^3 = x^3 \qquad b^3 = 27$$ *Se aplica raíz cúbica*

$$\sqrt[3]{a^3} = \sqrt[3]{x^3} \qquad \sqrt[3]{b^3} = \sqrt[3]{27}$$

$$a = x \qquad b = 3$$

Luego se sustituye en

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2)$$ *Se sustituyen valores*

$$(x + 3)[x^2 - (x)(3) + 3^2]$$ *Se multiplica*

$$= (x + 3)(x^2 - 3x + 9)$$

Por lo tanto

$$x^3 + 27 = (x + 3)(x^2 - 3x + 9)$$

Ejercicios

Factorizar por resta o suma de cubos.

1. x^3+81

2. $27x^3-27$

3. $9x^3-40$

4. x^3y^3+xy

5. $5x^3y-25xy$

6. $x^3y^3+8y^3$

7. x^2-4

8. x^3y^2+27xy

1.8.6 Factorización por agrupamiento

La factorización por agrupamiento es muy útil cuando el polinomio cuenta con cuatro o más términos, este método consiste en ordenar (agrupar) los términos y luego factorizarlos por medio de la propiedad distributiva.

Ejemplo

Factorizar por agrupamiento.

1. $5ac-25bc+ad-5bd$

Solución

Se agrupa el primer término con el tercer término, y el segundo término con el cuarto término.

$$5ac-25bc+ad-5bd$$

$$5ac+ad-25bc-5bd$$

De estos datos agrupados se obtiene el factor común.

$$a(5c+d)-5b(5c+d)$$

Se tiene como factor común $(5c+d)$

$$(5c + d)(a - 5b)$$

Por lo tanto

$$5ac - 25bc + ad - 5bd = (5c + d)(a - 5b)$$

2. $x^2 + 4x - 20y^2 + 4$

Solución

Se agrupa el primer término con el segundo término y el cuarto término.

$$x^2 + 4x - 20y^2 + 4$$

$$x^2 + 4x + 4 - 20y^2$$

De estos datos agrupados se factoriza.

$$(x + 2)^2 - 20y^2$$

Se factoriza como diferencia de cuadrados

$$\left[(x + 2) + 2\sqrt{5}y\right]\left[(x + 2) - 2\sqrt{5}y\right]$$

Por lo tanto

$$x^2 + 4x - 20y^2 + 4 = \left[(x + 2) + 2\sqrt{5}y\right]\left[(x + 2) - 2\sqrt{5}y\right]$$

Ejercicios

Demostrar las factorizaciones por agrupación.

	Ejercicio	*Solución*
1.	$x^3 - 4x^2 - 4xy + 4y + x^2y + 4y$	$(x - 2)^2(x + y)$

2. $2y^2 + 3xy - x - y + x^2$ $\quad (x + 2y - 1)(x + y)$

3. $-2ab^2d + 10abcd - 20a^2c^2 - 4a^2bc$ $\quad (ab + 5ac)(-4ac - 2bd)$

4. $5ab - 10a^3 + 2a^2b^2 - b^3$ $\quad (5a - b^2)(-2a^2 + b)$

5. $-abc - a^2b^2c - c^2b^3 - a^3$ $\quad (-a - b^2c)(a^2 + bc)$

6. $-4a^3bc - 2a^2b^2c^3$ $\quad (-4a - 2bc^2)(a^2bc)$

7. $-5abc + 16a^2bc + 80a^3b^2c^2$ $\quad (5abc + 1)(4a^2bc - 1)$

8. $7a^3b^3c + a^2bc^2 - 2a^3b^2c - \frac{7ab^2}{2} + ab - \frac{c}{2}$

$$(7ab^2 - 2ab + c)\left(a^2bc - \frac{1}{2}\right)$$

1.8.7 Factorización por división sintética

La expresión

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1x + a_0$$

Se puede factorizar por división sintética siguiendo los siguientes pasos.

Paso 1. Se escriben los coeficientes de cada término, y escribir cero para los coeficientes faltantes.

$$a_n \quad a_{n-1} \quad a_{n-2} \quad \cdots \quad a_1x \quad a_0 \quad ⬚$$

Se escribe de la siguiente forma

$$\begin{array}{cccccc|l}
a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1x & a_0 & \underline{} \\
 & & & & & & \\
\hline
a_n & \square & \square & \square & \square & 0 &
\end{array}$$

Paso 2. Se coloca una cantidad c (al tanteo) en el recuadro que está por fuera de la división

$$\begin{array}{cccccc|l}
a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1x & a_0 & \underline{c} \\
 & & & & & & \\
\hline
a_n & \square & \square & \square & \square & 0 &
\end{array}$$

Paso 3. Se multiplica c por a_n, al resultado se le cambia el signo y se coloca debajo de a_{n-1}, luego se suma o resta

$$\begin{array}{cccccc|l}
a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1x & a_0 & \underline{c} \\
\square & -ca_n & & \square & \square & \square & \\
\hline
a_n & a'_{n-1} & & \square & \square & 0 &
\end{array}$$

Se multiplica c por a'_{n-1}, al resultado se le cambia el signo y se coloca debajo de a_{n-2}, luego se suma o resta

$$\begin{array}{cccccc|l}
a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1x & a_0 & \underline{c} \\
 & -ca_n & ca'_{n-1} & \square & \square & \square & \\
\hline
a_n & a'_{n-1} & a'_{n-2} & & \square & 0 &
\end{array}$$

Se continúan estos pasos hasta terminar con todos los coeficientes, de tal forma que el último resultado sea cero.

$$\begin{array}{cccccc|l}
a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 & \underline{c} \\
 & -ca_n & ca'_{n-1} & \cdots & \square & -a_0 & \\
\hline
a_n & a'_{n-1} & a'_{n-2} & \cdots & & 0 &
\end{array}$$

Si esto ocurre, entonces se continúa con el paso 5; si no, entonces se vuelve a iniciar el paso 4 con otro valor para c.

Paso 4. Se escriben los coeficientes obtenidos

$$\begin{array}{cccccc|l} a_n & a'\,_{n-1} & a'\,_{n-2} & \cdots & a'_1 & & \underline{} \\ \hline a_n & \square & \square & \square & \square & 0 & \end{array}$$

Se repite el procedimiento desde el paso 2. Hasta que se cuente solamente con dos coeficientes.

$$\begin{array}{ccc|l} a_n & a'^{\cdots}{}_{n-1} & a'^{\cdots}{}_{n-2} & \underline{c_k} \\ & \square & a'^{\cdots}{}_{n-2} & \\ \hline a_n & a''^{\cdots}{}_{n-1} & 0 & \end{array}$$

Paso 5. Se escriben los factores.

$$(a_n x + a''^{\cdots}{}_{n-1})(x + c_k)(x + c_{k-1}) \cdots (x + c)$$

Ejemplo

Factorizar por división sintética.

1. $x^3 - 3x + 2$

Solución

Paso 1. Se escriben los coeficientes de cada término, y escribir cero para los coeficientes faltantes

$$\begin{array}{cccc|l} 1 & 0 & -3 & 2 & \underline{} \\ & \square & \square & \square & \\ \hline 1 & & \square & \square & \end{array}$$

Paso 2. Se coloca una cantidad c (al tanteo) en el recuadro que está por fuera de la división

$$\begin{array}{cccc|l} 1 & 0 & -3 & 2 & \underline{-1} \\ & \square & \square & \square & \\ \hline 1 & & \square & \square & \end{array}$$

Paso 3. Se multiplica c por a_n, al resultado se le cambia el signo y se coloca debajo de a_{n-1}, luego se suma o resta

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & 0 & -3 & 2 & -1 \\ \hline & +1 & \square & \square & \\ \hline 1 & 1 & \square & \square & \end{array}$$

Se multiplica c por a'_{n-1}, al resultado se le cambia el signo y se coloca debajo de a_{n-2}, luego se suma o resta.

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & 0 & -3 & 2 & -1 \\ \hline & 1 & +1 & \square & \\ \hline 1 & 1 & -2 & \square & \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & 0 & -3 & 2 & -1 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & \\ \hline 1 & 1 & -2 & 0 & \end{array}$$

Paso 4. Se escriben los coeficientes obtenidos

$$1 \quad 1 \quad -2$$

Y se escribe

$$\begin{array}{rrr|l} 1 & 1 & -2 & \\ \hline \square & \square & \square & \\ \hline 1 & \square & \square & \end{array}$$

Paso 2. Se coloca una cantidad c (al tanteo) en el recuadro que está por fuera de la división

$$\begin{array}{rrr|l} 1 & 1 & -2 & 2 \\ \hline \square & \square & \square & \\ \hline 1 & \square & \square & \end{array}$$

Paso 3. Se multiplica c por a_n, al resultado se le cambia el signo y se coloca debajo de a_{n-1}, luego se suma o resta

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 2 \\ \square & -2 & \square & \\ \hline 1 & -1 & \square & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 2 \\ \square & -2 & +2 & \\ \hline 1 & -1 & 0 & \end{array}$$

Paso 5. Se escriben los factores $(a_n x + a''^{\cdots}{}_{n-1})(x + c_k)(x + c_{k-1}) \cdots (x + c)$

$$(x-1)(x+2)(x-1)$$

$$(x-1)^2(x+2)$$

Por lo tanto

$$x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2)$$

Ejercicios

Factorizar por división sintética.

1. $x^3 - x^2 - 4x + 4$
2. $x^3 - x^2 - 10x - 8$
3. $x^4 - 2x^3 - 9x^2 + 2x + 8$
4. $x^4 - 5^3 + 5x^2 + 5x - 6$
5. $x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 15x^2 + 4x - 12$
6. $x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 15x^2 + 4x + 12$

7. $x^7 + 4x^6 - 14x^5 - 56x^4 + 49x^3 + 196x^2 - 36x - 144$

8. $x^3 + 2x^2 - 9x + 2$

1.8.8 Determinar el polinomio según las soluciones

Sean las soluciones

$$x_1 = a_1, \qquad x_2 = a_2, \qquad x_3 = a_3, \qquad \cdots, \qquad x_n = a_n$$

Se puede determinar el polinomio que satisface a esas soluciones como

$$x_1 - a_1 = 0, \qquad x_2 - a_2 = 0, \qquad x_3 - a_3 = 0, \qquad \cdots, \qquad x_n - a_n = 0$$

Y luego

$$(x_1 - a_1)\,(\,x_2 - a_2)\,(x_3 - a_3)\cdots(x_n - a_n)$$

Ejemplo

Determinar el polinomio según las soluciones.

1. $x = 5, x = -2, x = 7, x = -9$

Solución

$x = 5$	$x = -2$	$x = 7$	$x = -9$
$x - 5 = 0$	$x + 2 = 0$	$x - 7 = 0$	$x + 9 = 0$

Se multiplican los factores

$$\underbrace{(x-5)(x+2)}(x-7)(x+9)$$

$$= (x^2 + 2x - 5x - 10)(x-7)(x+9)$$

$$= \underbrace{(x^2 - 3x - 10)(x-7)}(x+9)$$

$$= (x^3 - 3x^2 - 10x - 7x^2 + 21x + 70)(x+9)$$

$$= (x^3 - 10x^2 + 11x + 70)(x+9)$$

$$= x^4 - 10x^3 + 11x^2 + 70x + 9x^3 - 90x^2 + 99x + 630$$

$$= x^4 - x^3 - 79x^2 + 169x + 630$$

Ejercicios

Determinar el polinomio según las soluciones.

1. $x = -1, x = 4, x = 7, x = -3$
2. $x = 2, x = -8, x = 9, x = -2$
3. $x = -4, x = \frac{1}{2}, x = -5, x = 1, x = -3, x = -2, x = 7$
4. $x = 5, x = 8\ x = -9, x = -2, x = -5, x = -4, x = -9$

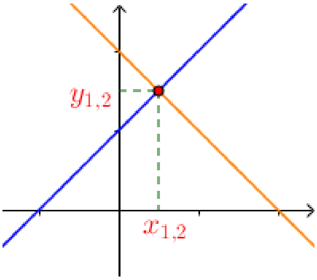
1.9 Sistemas de ecuaciones lineales

1.9.1 Sistemas de ecuaciones lineales con dos ecuaciones y dos variables

Un sistema de ecuaciones lineales con dos ecuaciones y dos variables es de la forma

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

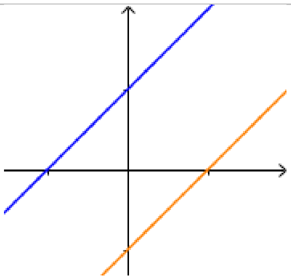
Donde la llave indica que las ecuaciones deben resolverse simultáneamente. Resolver este tipo de sistemas es determinar los valores de las variables que cumplen las igualdades para ambas ecuaciones; pudiendo tener una solución única, soluciones infinitas o no tener solución. Gráficamente sucede



Solución única.

Ejemplo

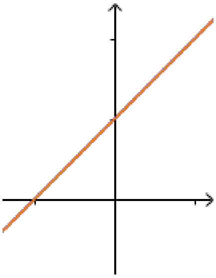
$$\begin{cases} x + 3y = 2 \\ -2x - 4y = -1 \end{cases}$$



No tiene solución.

Esto sucede cuando en una de las ecuaciones, el lado del signo igual que contiene a las variables es múltiplo de la parte de las variables de la otra ecuación.

Ejemplo



Soluciones infinitas

Esto sucede cuando una de las ecuaciones es múltiplo de la otra.

Ejemplo

$$\begin{cases} 2x + 4y = 5 \\ 10x + 20y = 25 \end{cases}$$

	$\begin{cases} 4x - 3y = 5 \\ 12x - 9y = -2 \end{cases}$ Se observa como el lado del signo igual que contiene a las variables es múltiplo de la otra.	Se puede observar que una de las ecuaciones es múltiplo de la otra.

Existen diferentes métodos de solución, de los cuales se pueden mencionar los siguientes:

a) Método gráfico.
b) Método de eliminación.
c) Método de sustitución.
d) Método de las determinantes.
e) Método de Gauss-Jordan.

En este curso solo se estudiará el método de eliminación, ya que el resto se analizará en álgebra lineal.

Método de eliminación

Los pasos para este método son:

Paso 1. Se verifica si al sumar ambas ecuaciones se elimina alguna de las variables. Si esto ocurre, entonces se continúa con el paso 3; si no, entonces se sigue el paso 2.

Paso 2. a) Se elige una variable a eliminar.
  b) Se multiplica la primera ecuación por el coeficiente de la variable que se ha elegido de la segunda ecuación. Y se multiplica la segunda ecuación por el coeficiente de la variable que se ha elegido de la primera ecuación. Verificando los signos.

c) Se suman las nuevas ecuaciones obtenidas. Donde ya se elimina la variable elegida.

Paso 3. En el resultado obtenido de la suma, se despeja la variable. De esta forma ya se tiene el valor de una variable.

Paso 4. Se sustituye el valor obtenido en el paso 3, en cualquiera de las ecuaciones originales, y se resuelve. Ahora ya se cuenta con la solución.

Ejemplo

Resolver por el método de eliminación el siguiente sistema de ecuaciones.

1. $$\begin{cases} x + 5y = -1 \\ 9x - 2y = 4 \end{cases}$$

Solución

Paso 1. Se verifica si al sumar ambas ecuaciones se elimina alguna de las variables

$$\begin{array}{ccccc} x & + & 5y & = & -1 \\ 9x & - & 2y & = & 4 \\ \hline 10x & + & 3y & = & 3 \end{array}$$

Se observa que no se elimina ninguna de las variables.

Paso 2.

a) Se elige una variable a eliminar.

En este ejemplo se eliminará x

b) Se multiplica la primera ecuación por el coeficiente de la variable que se ha elegido de la segunda ecuación. Y se multiplica la segunda ecuación por el coeficiente de la *variable que se ha elegido de la primera ecuación. Verificando los signos.*

$$\begin{array}{rcccccl} 9 & (x & + & 5y & = & -1) \\ -1 & (9x & - & 2y & = & 4) \end{array}$$

Las nuevas ecuaciones son:

$$\begin{array}{ccccc} -9x & + & 45y & = & -9 \\ 9x & + & 2y & = & -4 \end{array}$$

c) Se suman las nuevas ecuaciones obtenidas. Donde ya se elimina la variable elegida.

$$\begin{array}{cccccc} & -\cancel{9x} & + & 45y & = & -9 \\ & \cancel{9x} & + & 2y & = & -4 \\ \hline ⬚ & ⬚ & & 47y & = & -13 \end{array}$$

Paso 3. En el resultado obtenido de la suma, se despeja la variable.

$$47y = -13$$

$$y = \frac{-13}{47}$$

De esta forma se obtiene que

$$y = \frac{-13}{47}$$

Paso 4. Se sustituye el valor obtenido en el paso 3, en cualquiera de las ecuaciones originales, y se resuelve. Ahora ya se cuenta con la solución.

$$x + 5y = -1$$

$$x + 5\left(\frac{-13}{47}\right) = -1$$

$$x - \frac{65}{47} = -1$$

$$x = -1 + \frac{65}{47}$$

$$x = \frac{18}{47}$$

Por lo tanto, la solución es

$$\begin{cases} x = \dfrac{18}{47} \\ \text{⬚} \\ y = \dfrac{-13}{47} \end{cases}$$

Ejercicios

Demostrar las soluciones a los siguientes sistemas de ecuaciones.

	Ejercicio	*Solución*
1.	$\begin{cases} 2x + 5y = 1 \\ -5x + 3y = -2 \end{cases}$	$x = \frac{18}{47}$ ⬚ $y = \frac{-13}{47}$
2.	$\begin{cases} 2x + 5y = 1 \\ 8x + 20y = -2 \end{cases}$	No tiene solución
3.	$\begin{cases} 3x - 5y = 1 \\ 9x - 15y = 3 \end{cases}$	Soluciones infinitas
4.	$\begin{cases} -x - 8y = 3 \\ x + 7y = -3 \end{cases}$	$x = -3$ ⬚ $y = 0$
5.	$\begin{cases} -x - 8y = -1 \\ -2x + 2y = -2 \end{cases}$	$x = 1$ ⬚ $y = 0$
6.	$\begin{cases} 5x + 4y = -4 \\ -x + 5y = 8 \end{cases}$	$x = -\frac{52}{29}$ ⬚ $y = \frac{36}{29}$

7. $\begin{cases} 4x & + & 10y & = & 4 \\ 2x & + & 5y & = & 8 \end{cases}$ Soluciones infinitas

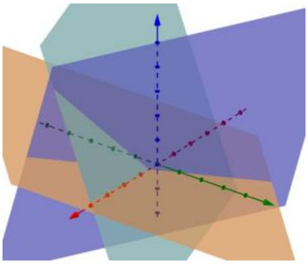
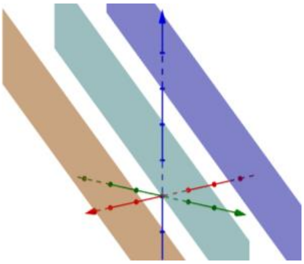
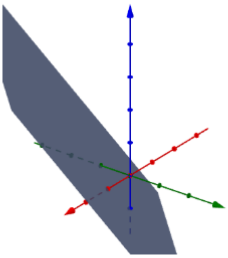
8. $\begin{cases} 2x & - & 18y & = & 1 \\ x & - & 9y & = & -5 \end{cases}$ No tiene solución

1.9.2 Sistemas de ecuaciones lineales con tres ecuaciones y tres variables

Un sistema de ecuaciones lineales con tres ecuaciones y tres variables es de la forma

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

Donde la llave indica que las ecuaciones deben resolverse simultáneamente. Resolver este tipo de sistemas es determinar los valores de las variables que cumplen las igualdades para las tres ecuaciones; pudiendo tener una solución única, soluciones infinitas o no tener solución. Gráficamente sucede

		
Solución única. Por ejemplo	**No tiene solución.** Esto sucede cuando en una de las ecuaciones, el lado del signo igual que	**Soluciones infinitas.** Esto sucede cuando una de las ecuaciones es múltiplo de la otra.

$\begin{cases} x - y - 3z = 1 \\ x + 2y - z = -1 \\ x - 3y - z = 4 \end{cases}$	contiene a las variables es múltiplo de la parte de las variables de la otra ecuación. Puede suceder en dos o en tres ecuaciones. Ejemplo $\begin{cases} x + y - z = 5 \\ 2x + 2y - 2z = -1 \\ 4x + 4y - 4z = 3 \end{cases}$	Ejemplo $\begin{cases} x + y - z = 5 \\ 2x + 2y - 2z = 10 \\ 4x + 4y - 4z = 20 \end{cases}$

Existen diferentes métodos de solución, de los cuales se pueden mencionar los siguientes:

a) Método de eliminación.
b) Método de sustitución.
c) Método de las determinantes.
d) Método de Gauss-Jordan.

En este curso solo se estudiará el método de eliminación, ya que el resto se analizará en álgebra lineal.

Método de eliminación

Los pasos para este método son:

Paso 1. Se verifica si al sumar dos ecuaciones se elimina alguna de las variables. Si esto ocurre, entonces se continúa con el *paso 3*; si no, entonces se sigue el *paso 2* inciso *e*.

Paso 2. a) Se nombran las ecuaciones como *ec1*, *ec2*, *ec3*.
b) Se elige una variable a eliminar.

c) Se eligen dos ecuaciones, pueden ser *ec1* con *ec2,* o *ec1* con *ec3,* o *ec2* con *ec3*. Para formar un sistema de dos ecuaciones con tres variables.
d) En caso de ser necesario, en el nuevo sistema se multiplica la primera ecuación por el coeficiente de la variable que se ha elegido de la segunda ecuación. Y se multiplica la segunda ecuación por el coeficiente de la variable que se ha elegido de la primera ecuación. Verificando los signos.
e) Se suman las ecuaciones obtenidas. Donde ya se elimina la variable elegida. Este resultado se llamará *ec4*.
f) Se elige una de las ecuaciones originales con la que faltó en el inciso *c*, para formar otro sistema de dos ecuaciones con tres variables.
g) En el nuevo sistema se multiplica la primera ecuación por el coeficiente de la misma variable que se eligió de la segunda ecuación. Y se multiplica la segunda ecuación por el coeficiente de la misma variable que se eligió de la primera ecuación. Verificando los signos.
h) Se suman las nuevas ecuaciones obtenidas. Donde ya se elimina la variable elegida. Este resultado se llamará *ec5*.

Paso 3. En las ecuaciones *ec4* y *ec5* se forma un sistema de dos ecuaciones con dos variables.

a) Se elige una variable a eliminar.
b) Se multiplica *ec4* por el coeficiente de la variable que se ha elegido de *ec5*. Y se multiplica *ec5* por el coeficiente de la variable que se ha elegido de *ec4*. Verificando los signos.
c) Se suman las nuevas ecuaciones obtenidas. Donde ya se elimina la variable elegida.

Paso 4. Se resuelve el resultado obtenido en el *paso 3*, y ya se tiene el valor de una variable.

Paso 5. El resultado obtenido en el *paso 4* se sustituye en *ec4* o en *ec5*. Se resuelve, y ya se tiene el valor de otra variable.

Paso 6. Los resultados obtenidos en los *pasos 4* y 5 se sustituyen en cualquiera de las ecuaciones originales, se resuelve.

Paso 7. Se escribe el resultado.

Ejemplo

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones.

1. $$\begin{cases} 2x - 3y + 5z = 2 \\ -\ x + 4y - 2z = -1 \\ x\ -\ y\ + 4z = 3 \end{cases}$$

Solución

Paso 1. No se elimina ninguna variable

Paso 2.

a) Se nombran las ecuaciones

$$\begin{cases} 2x - 3y + 5z = 2 & \rightarrow ec1 \\ -\ x + 4y - 2z = -1 & \rightarrow ec2 \\ x\ -\ y\ + 4z = 3 & \rightarrow ec3 \end{cases}$$

b) Se elige una variable a eliminar

En este ejemplo se eliminará x

c) Se eligen dos ecuaciones

En este ejemplo se eligen *ec2* con *ec3*

$$\begin{cases} -\ x + 4y - 2z = -1 \\ x\ -\ y\ + 4z = 3 \end{cases}$$

d) En caso de ser necesario, el nuevo sistema se multiplica la primera ecuación por el coeficiente de la variable que se ha elegido de la segunda ecuación. Y se multiplica la segunda ecuación por el coeficiente de la variable que se ha elegido de la primera ecuación. Verificando los signos.

e) Se suman las ecuaciones obtenidas. Donde ya se elimina la variable elegida. Este resultado se llamará ec4.

$$\begin{array}{r} \cancel{-x} + 4y - 2z = -1 \\ \cancel{x} - y + 4z = 3 \\ \hline 3y + 2z = 2 \end{array} \quad \rightarrow ec4$$

f) *Se elige una de las ecuaciones originales con la que faltó en el inciso c, para formar otro sistema de dos ecuaciones con tres variables.*

Faltó *ec1*, y se resolverá con *ec2*.

$$\begin{cases} 2x - 3y + 5z = 2 \\ - x + 4y - 2z = -1 \end{cases}$$

g) *En el nuevo sistema se multiplica la primera ecuación por el coeficiente de la misma variable que se eligió de la segunda ecuación. Y se multiplica la segunda ecuación por el coeficiente de la misma variable que se eligió de la primera ecuación. Verificando los signos.*

h) *Se suman las nuevas ecuaciones obtenidas. Donde ya se elimina la variable elegida. Este resultado se llamará ec5.*

$$\begin{array}{r} 1(\ \ 2x - 3y + 5z = 2 \ \ ) \\ 2(- x + 4y - 2z = -1) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \cancel{2x} - 3y + 5z = 2 \\ \cancel{-2x} + 8y - 4z = -2 \\ \hline 5y + z = 0 \end{array} \quad \rightarrow ec5$$

Paso 3. En las ecuaciones ec4 y ec5 se forma un sistema de dos ecuaciones con dos variables.

$$\begin{cases} 3y + 2z = 2 \\ 5y + z = 0 \end{cases}$$

a) *Se elige una variable a eliminar*

En este ejemplo se eliminará z

b) Se multiplica ec4 por el coeficiente de la variable que se ha elegido de ec5. Y se multiplica ec5 por el coeficiente de la variable que se ha elegido de ec4. Verificando los signos

$$-1(3y + 2z = 2)$$
$$2(\ 5y + z = 0\ )$$

$$-3y - 2z = -2$$
$$10y + 2z = 0$$

c) Se suman las nuevas ecuaciones obtenidas. Donde ya se elimina la variable elegida.

$$\begin{array}{r} -3y\cancel{-2z} = -2 \\ 10y\cancel{+2z} = 0 \\ \hline 7y \qquad = -2 \end{array}$$

Paso 4. Se resuelve el resultado obtenido en el paso 3, y ya se tiene el valor de una variable.

$$7y = -2$$
$$y = \frac{-2}{7}$$

Paso 5. El resultado obtenido en el paso 4 se sustituye en ec4 o en ec5. Se resuelve, y ya se tiene el valor de otra variable

Sustituyendo en ec5 y se resuelve

$$5y + z = 0$$
$$5\left(\frac{-2}{7}\right) + z = 0$$
$$-\frac{10}{7} + z = 0$$
$$z = 0 + \frac{10}{7}$$

$$z = \frac{10}{7}$$

Paso 6. Los resultados obtenidos en los pasos 4 y 5 se sustituyen en cualquiera de las ecuaciones originales, se resuelve.

Se sustituyen valores en ec3 y se resuelve

$$x - y + 4z = 3$$

$$x - \left(\frac{-2}{7}\right) + 4\left(\frac{10}{7}\right) = 3$$

$$x + \frac{2}{7} + \frac{40}{7} = 3$$

$$x + \frac{42}{7} = 3$$

$$x + 6 = 3$$

$$x = 3 - 6$$

$$x = -3$$

Paso 7. Se escribe el resultado.

$$\begin{cases} x = -3 \\ \square \\ y = \dfrac{-2}{7} \\ \square \\ z = \dfrac{10}{7} \end{cases}$$

Ejercicios

Demostrar las soluciones de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales.

Ejercicio *Solución*

1. $\begin{cases} a+b-c=2 \\ 5a-4b+3c=-1 \\ -3a+5b-2c=-3 \end{cases}$ $\quad a=\frac{8}{19} \quad b=-\frac{31}{19} \quad c=-\frac{61}{19}$

2. $\begin{cases} 5a+2b-3c=0 \\ -a-5b+2c=-2 \\ -4a+3b-c=-4 \end{cases}$ $\quad a=\frac{29}{23} \quad b=-\frac{31}{23} \quad c=3$

3. $\begin{cases} -a-3b-4c=5 \\ 2a-5b+2c=7 \\ a+4b-2c=5 \end{cases}$ $\quad a=\frac{137}{36} \quad b=-\frac{7}{12} \quad c=-\frac{127}{72}$

4. $\begin{cases} -2a-5b-3c=8 \\ -8a-20b-12c=32 \\ a+4b-2c=5 \end{cases}$ $\quad a=-\frac{22}{3}c-19 \quad b=\frac{7}{3}c+6 \quad c \in \mathbb{C}$

5. $\begin{cases} -2a-5b-3c=8 \\ -8a-20b-12c=32 \\ -32a-80b-48c=128 \end{cases}$ $\quad a=-\frac{3}{2}c-\frac{5}{2}b-4 \quad b \in \mathbb{C} \quad c \in \mathbb{C}$

6. $\begin{cases} a+2b-2c=-5 \\ 2a+4b-4c=1 \\ -a-5b+2c=3 \end{cases}$ No tiene solución

7. $\begin{cases} a+2b-2c=-5 \\ 2a+4b-4c=1 \\ 4a+8b-8c=3 \end{cases}$ No tiene solución

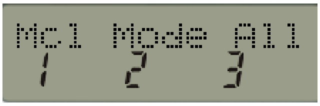
8. $\begin{cases} -3a+4b-c=-1 \\ a+3b+5c=-3 \\ 7a+b-c=-5 \end{cases}$ $\quad a=-\frac{29}{47} \quad b=-\frac{34}{47} \quad c=-\frac{2}{47}$

1.10 Uso de calculadora científica

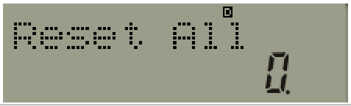
Borrar todas las configuraciones y datos guardados de la calculadora

Series fx-82ms y similares

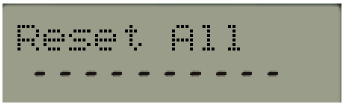
1) qw


Mcl Mode All
1 2 3

2) 3=


Reset All
0.

3) 3

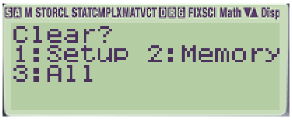

Reset All
----

4) =


0.

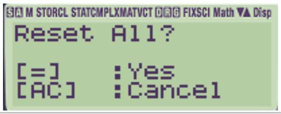
Series fx-82es y similares

1) q9



Clear?
1:Setup 2:Memory
3:All

2) 3

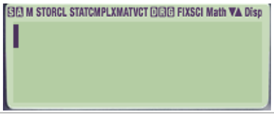


Reset All?
[=] :Yes
[AC] :Cancel

3) =

Reset All
Press [AC] key

4) C



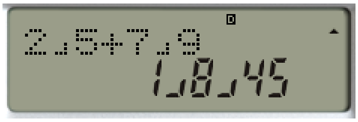
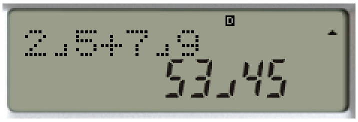
Operaciones matemáticas básicas con fracciones

Las fracciones se escriben

numeradoradenominador o anumerador$denominador

Ejemplo

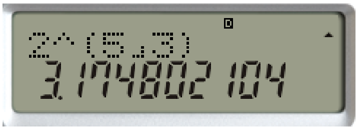
$$\frac{2}{5}+\frac{7}{9}$$

Series fx-82ms y similares	Series fx-82es y similares
2a5+7a9=  2⌟5+7⌟9 1⌟8⌟45	a2\$5\$+a7\$9=  $\frac{2}{5}+\frac{7}{9}$ $\frac{53}{45}$
qa  2⌟5+7⌟9 53⌟45	n  $\frac{2}{5}+\frac{7}{9}$ 1.177777778

Exponentes y raíces

Ejemplo

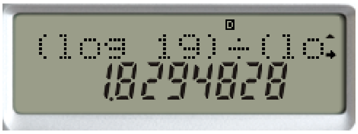
$$\sqrt[3]{2^5}=2^{\frac{5}{3}}$$

Series fx-82ms y similares	Series fx-82es y similares
2^(5a3)=  2^(5⌟3) 3.174802104	q^3\$^!2\$5=  $\sqrt[3]{2^5}$ 3.174802104

Logaritmos

Ejemplo

$$\log_5 19$$

Series fx-82ms y similares	Series fx-82es y similares
En forma general $\log_b a = \frac{\log a}{\log b}$	
(H19)P(H5)=  (log 19)÷(lo 1.8294828	i5$19=  $\log_5(19)$ 1.8294828

Sustituir valores de variables en un polinomio

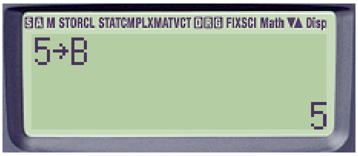
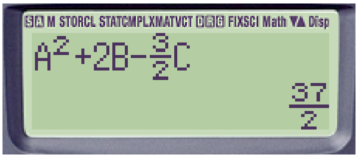
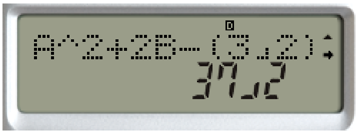
Ejemplo

Evaluar

$$a^2 + 2b - \frac{3}{2}c$$

Si $a = 2$, $b = 5$ y $c = -3$

Series fx-82ms y similares	Series fx-82es y similares
2qGzC  2→A 2.	2qGzC  2→A 2
5qGxC	5qGxC

	 5→B 5.	 5→B 5
	-3qGcC	-3qGcC
	 -3→C -3.	 -3→C -3
	Qz^2+2Qx-(3a2)Qc=	Qz^2$+2Qx-a3$2$Qc=
	 A^2+2B-(3⌟2) 18⌟1⌟2	 $A^2+2B-\frac{3}{2}C$ $\frac{37}{2}$
	qa	n
	 A^2+2B-(3⌟2) 37⌟2	 $A^2+2B-\frac{3}{2}C$ 18.5

1.11 Aplicaciones con modelado matemático

Para resolver ejercicios con modelado matemático se pueden seguir los siguientes pasos.

1. Leer cuidadosamente el enunciado cuantas veces sea necesario hasta entenderlo e identificar lo que se desea resolver.
2. Se usan letras para identificar las variables.
3. Se hace una lista de los datos con que se cuenta.
4. Se hace un dibujo con las indicaciones de los datos con que se cuenta.

5. Se genera una ecuación con las relaciones de las variables, los datos y lo que expresa el enunciado.
6. Se resuelve la ecuación formulada usando las leyes de las matemáticas necesarias.
7. Se comprueban las soluciones obtenidas de acuerdo con lo expresado en el enunciado

Resolver los siguientes ejercicios.

1. El cuerpo de una persona promedio contiene 5.5 litros de sangre y aproximadamente 5 millones de células sanguíneas rojas por milímetro cubico de sangre. Si $1L = 10^6 mm^3$, calcular la cantidad de células sanguíneas rojas en el cuerpo de una persona promedio.

2. Un estudiante de nuevo ingreso en el ITHua; en el curso de nivelación de matemáticas tiene calificaciones de 70, 94 y 87. ¿Qué calificación necesita en su cuarta evaluación para tener promedio de 90?

3. Un estudiante de Ingeniería en Industrias alimentarias en el ITHua tiene 20 milimetros de una solución química que contiene una concentración al $35\ \%$ de ácido. ¿Cuántos milímetros de ácido puro debe agregar para aumentar la concentración al $50\ \%$?

4. El ITHua cuenta con dos bombas para llenar un tanque de almacenamiento de agua. Si se emplea solo la bomba *A*, esta puede llenar el tanque en 3 horas; si se emplea solo la bomba *B*, el tanque se llena en 4 horas. Si se usan ambas bombas en forma simultánea, ¿cuánto tardará en llenarse el tanque de agua?

5. Un estudiante de Ingeniería en Industrias alimentarias en el ITHua tiene $208\ cm^3$ de una solución del glucosa al $30\ \%$. ¿Cuánta solución de glucosa al $30\ \%$ y cuánta agua debe usar para preparar $208\ cm^3$ de solución glucosa al $20\ \%$?

6. Una caja con base cuadrada y sin tapa ha de construirse a partir de una pieza de hojalata cortando un cuadrado de $5\ cm.$ en cada esquina y doblando los lados. Si la caja debe contener $80\ cm^3$, ¿de qué tamaño debe ser la pieza de hojalata?

7. En el ITHua hay un jardín que tiene forma rectangular con dimensiones de $5\ m.$ por $8\ m.$ y está rodeado por una banqueta de ancho uniforme. Si el área de la banqueta es de $20\ m^2$, ¿cuál es su ancho?

8. Un estudiante de Ingeniería en Gestión Empresarial del ITHua

tiene a la venta cuadernos con un precio de $\$30$ cada uno, y vende 10 cuadernos por semana. No obstante, cada vez que los pone en oferta a $25 las ventas aumentan 2 por semana. ¿Qué precio de venta resultará en ingresos semanales de $\$520$?

9. Un empleado de una empresa tiene un salario de $\$544$ despues de restar deducciones que totalizan $35\ \%$ del mismo. El empleado desea saber cuál es su salario bruto, y para esto le pregunta a un estudiante de Contabilidad Pública del ITHua.

10. Un estudiante de Ingeniería en Administración del ITHua realiza sus residencias profesionales en el cine de la localidad. Durante el estreno de una película asistieron 720 personas; el estudiante desea saber cuántos niños y cuantos adultos asistieron al estreno si los boletos para adultos costaron $\$45$ y los boletos para niños $\$20$, además, los recibos de taquilla totalizan $\$21{,}150$.

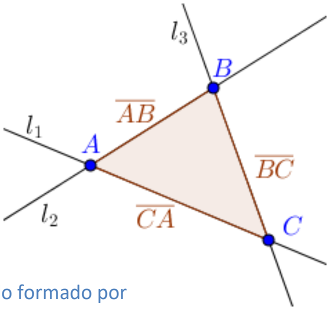
11. Unos estudiantes de Ingeniería en Mecatrónica y Mecánica del ITHua saben que para determinar la resistencia total R_T en circuitos eléctricos, se usa la fórmula $R_T = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots$ si están conectados en paralelo. Los estudiantes se dan cuenta que un circuito tiene resistencia total de $50\ ohms$ si A y B están conectados en paralelo, $82\ ohms$ si B y C están en paralelo y $70\ ohms$ si A y C están en paralelo. ¿Cuáles son las resistencias de A, B y C?

12. Estudiantes de Ingeniería en Industrias alimentarias del ITHua tienen tres tipos de fertilizantes f_1, f_2 y f_3, estos fertilizantes tienen un contenido de nitrógeno de $25\ \%$, $32\ \%$ y $17\ \%$, respectivamente. Los estudiantes quieren mezclarlos para obtener 200 kilos de fertilizante con $28\ \%$ de contenido de nitrógeno. La mezcla debe contener 10 kilos más de f_3 que de f_2. ¿Cuántos kilos de cada fertilizante deben usar?

2. Geometría y trigonometría

2.1 Triángulos

Un triángulo es el área del plano que está limitada por tres líneas rectas, las cuales se intersecan entre sí.



La ilustracion 2 muestra A, B y C los puntos donde se intersecan las líneas rectas l_1, l_2 y l_3; estos puntos se llaman *vértices*.

Mientras que los segmentos de recta $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CA}$ se llaman *lados*.

Ilustración 2. Triángulo formado por tres líneas rectas.

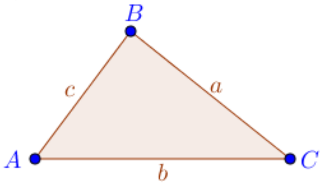


Ilustración 3. Nombres que se asignan a los lados del triángulo.

En la ilustración 3 se muestran los nombres que se asignan a los lados del triángulo; esto depende del vértice que se encuentre al frente del lado en mención. Nótese que los vértices se denotan por letras mayúsculas, mientras que los lados con letras minúsculas.

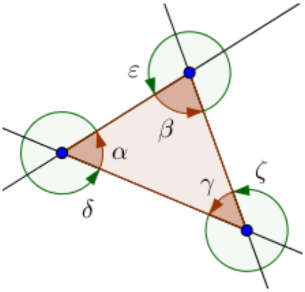
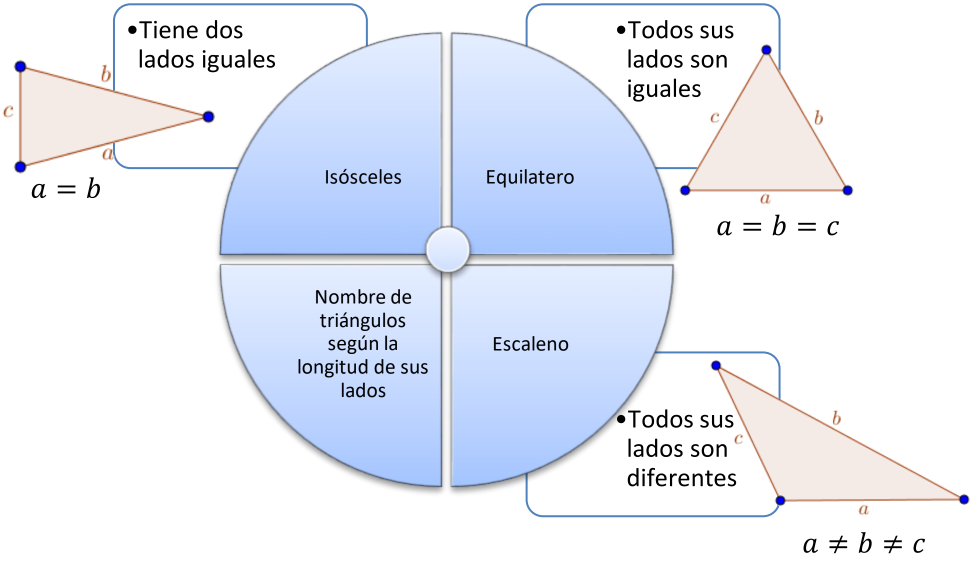


Ilustración 2. Ángulos internos (rojo) y ángulos externos (verde)

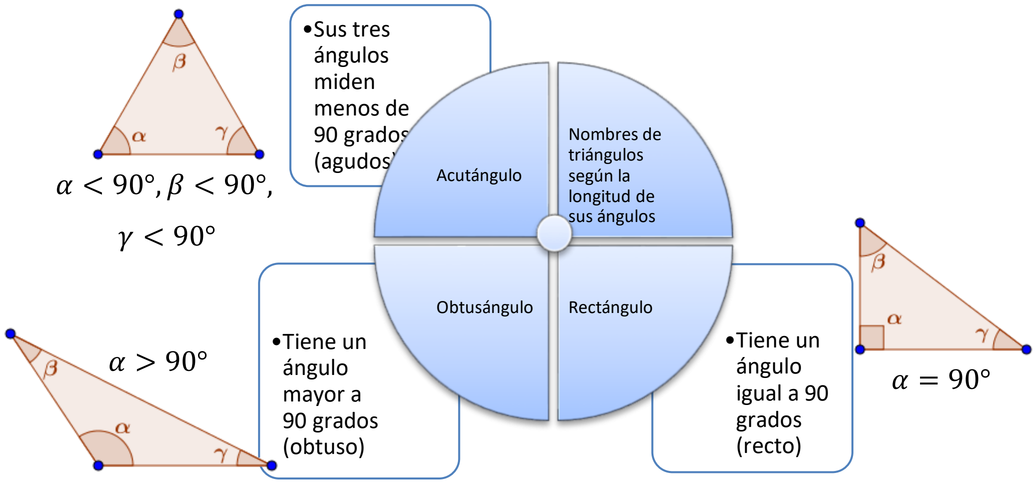
En la ilustración 4 las líneas rectas forman ángulos con respecto a sus vértices. α, β y γ son ángulos interiores del triángulo; mientras que δ, ε y ζ son ángulos exteriores al triángulo.

Existen dos formas para asignar nombres a los triángulos. Estas pueden ser tomando en cuenta la longitud de sus lados o por la medida de sus ángulos interiores.

- Según la longitud de sus lados pueden ser:



- Según la medida de sus ángulos interiores pueden ser:



- Sus tres ángulos miden menos de 90 grados (agudos)

$\alpha < 90°, \beta < 90°,$
$\gamma < 90°$

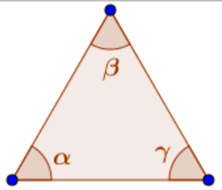
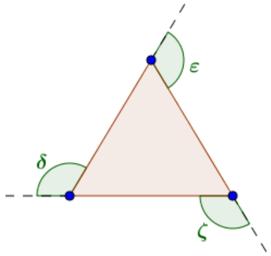
- Tiene un ángulo mayor a 90 grados (obtuso)

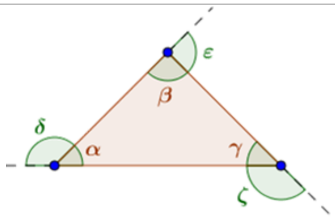
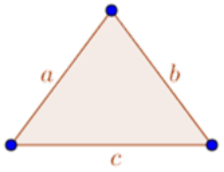
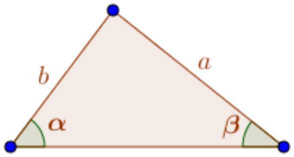
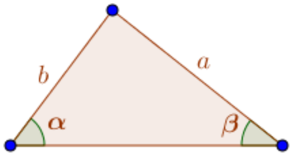
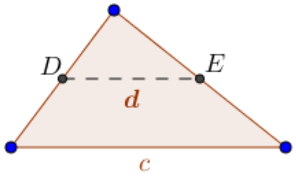
$\alpha > 90°$

- Tiene un ángulo igual a 90 grados (recto)

$\alpha = 90°$

Algunos teoremas sobre triángulos

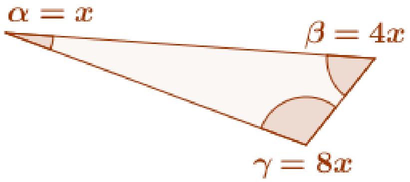
Teorema	Ilustracion	Expresión matemática
1. La suma de las magnitudes de los ángulos interiores es igual a 180°.		$\alpha + \beta + \gamma = 180°$
2. La suma de las magnitudes de los ángulos exteriores es igual a 360°.		$\delta + \varepsilon + \zeta = 360°$

3. La suma de dos ángulos interiores es igual al ángulo exterior no adyacente a ellos.		$\delta = \beta + \gamma$ $\varepsilon = \alpha + \beta$ $\zeta = \alpha + \beta$
4. La suma de dos lados cualesquiera es mayor que el lado restante, mientras que su diferencia es menor.		$a > b - c$ $a < b + c$ $b > a - c$ $b < a + c$ $c > a - b$ $c < a + b$
5. Si dos lados son diferentes, entonces al lado mayor se opone el ángulo mayor.		Si $a > b$, entonces $\alpha > \beta$
6. Si dos ángulos son diferentes, entonces al ángulo mayor se opone lado mayor.		Si $\alpha > \beta$, entonces $a > b$
7. El segmento de recta que une los puntos medios de dos lados es paralelo e igual a un medio de la longitud del lado restante.		$d \parallel c$ $d = \frac{1}{2}c$

Ejemplos

Haciendo uso de los teoremas sobre triángulos, determina lo que se pide en cada ejemplo.

1. Determinar los ángulos interiores del siguiente triángulo



Solución

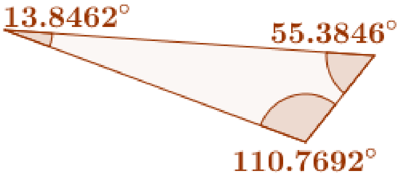
Por el teorema 2.1, se sabe que los ángulos interiores del triángulo suman $180°$*, por lo que*

$\alpha + \beta + \gamma = 180°$	*Sustituyendo valores*
$x + 4x + 8x = 180°$	*Sumando los términos semejantes*
$13x = 180°$	*Despejando la variable x*
$x = \frac{180°}{13}$	*dividiendo*
$x \approx 13.8462°$	

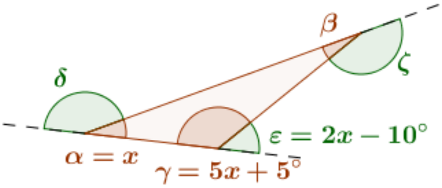
Sustituyendo el resultado obtenido de x

Para $\alpha = x$	*Para* $\beta = 4x$	*Para* $\gamma = 8x$
$\alpha = x$	$\beta = 4x$	$\gamma = 8x$
$\alpha \approx 13.8462°$	$\beta \approx 4(13.8462°)$	$\gamma \approx 8(13.8462°)$
	$\beta \approx 55.3846°$	$\gamma \approx 110.7692°$

Por lo tanto

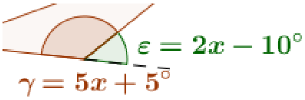


2. Determinar los ángulos indicados del siguiente triángulo



Solución

Para determinar el valor de x



$$\gamma + \varepsilon = 180°$$

$$(5x + 5°) + (2x - 10°) = 180°$$

Sumando términos semejantes

$$5x + 5° + 2x - 10° = 180°$$

$$7x - 5° = 180°$$

Se despeja x

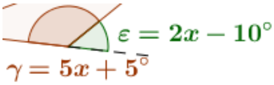
$$7x = 180° + 5°$$

$$7x = 185°$$

$$x = \frac{185°}{7}$$

$$x = 26.4285°$$

Ahora, sustituyendo el valor obtenido de x



Para $\gamma = 5x + 5^\circ$

$$\gamma = 5(26.4285^\circ) + 5^\circ$$

$$\gamma \approx 132.1428^\circ + 5^\circ$$

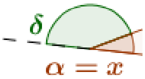
$$\gamma \approx 137.1428^\circ$$

Para $\varepsilon = 2x - 10^\circ$

$$\varepsilon = 2(26.4285^\circ) - 10^\circ$$

$$\varepsilon \approx 52.8571^\circ - 10^\circ$$

$$\varepsilon \approx 42.8571^\circ$$



Para $\alpha = x$

$$\alpha \approx 26.4285^\circ$$

Para δ

$$\delta + \alpha = 180^\circ$$

$$\delta = 180^\circ - \alpha$$

$$\delta \approx 180^\circ - 26.4285^\circ$$

$$\delta \approx 153.5415^\circ$$

Para β

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

$$\beta = 180^\circ - \alpha - \gamma$$

$$\beta \approx 180^\circ - 26.4285^\circ - 137.1428^\circ$$

$$\beta \approx 16.4287^\circ$$

Para ζ

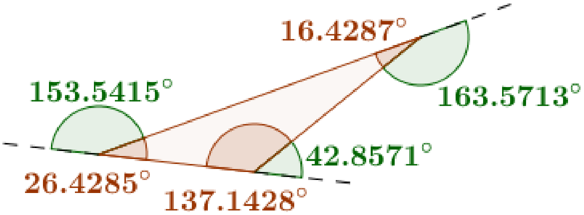
$$\zeta + \beta = 180^\circ$$

$$\zeta = 180^\circ - \beta$$

$$\zeta \approx 180^\circ - 16.4287^\circ$$

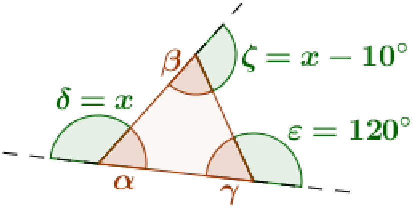
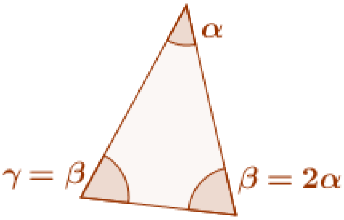
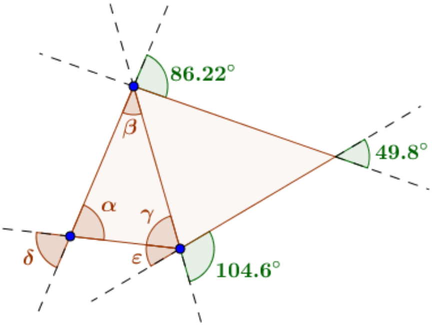
$$\zeta \approx 163.5713^\circ$$

Por lo tanto

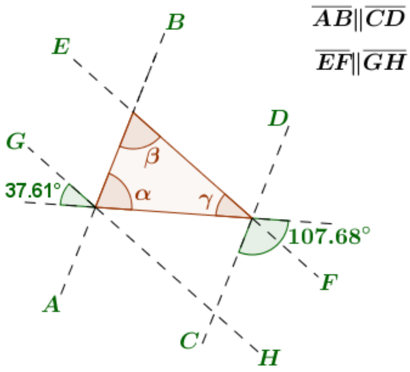


Ejercicios

Demuestra las soluciones a los siguientes ejercicios.

	Ejercicio	*Solución*
1.		$\alpha = 55°$ $\beta = 65°$ $\gamma = 60°$ $\delta = 125°$ $\varepsilon = 120°$ $\zeta = 115°$
2.		$\alpha = 36°$ $\beta = 72°$ $\gamma = 72°$
3.		$\alpha = 73.48°$ $\beta = 38.99°$ $\gamma = 67.53°$ $\delta = 73.48°$ $\varepsilon = 37.06°$

4.



$$\alpha = 72.32°$$
$$\beta = 37.61°$$
$$\gamma = 70.07°$$

2.1.1 Triángulos congruentes

Los triángulos congruentes son aquellos que son iguales en forma y tamaño.

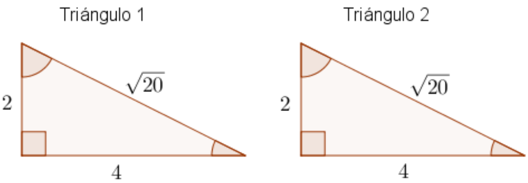
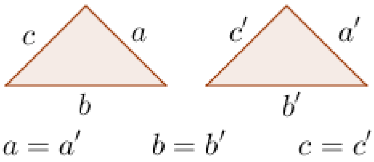


Ilustración 3. Los triángulos 1 y 2, son semejantes porque tienen lados y ángulos iguales

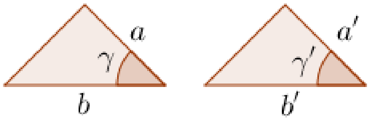
Si los triángulos son congruentes, entonces se cumplen dos propiedades: 1) Todos sus lados correspondientes son iguales y 2) Todos sus ángulos correspondientes son iguales. Como se muestra en la ilustración 5.

Es posible determinar si dos triángulos son congruentes mediantes tres formas que son:

a) **Lado, lado, lado (LLL)**. Dos triángulos son congruentes si sus tres lados correspondientes son iguales.

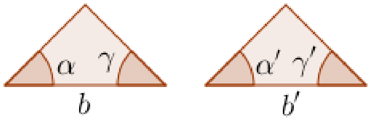


b) **Lado, ángulo, lado (LAL)**. Dos triángulos son congruentes si dos lados y el ángulo entre ellos de uno de los triángulos, son iguales a sus correspondientes del otro triángulo.



$a = a'$ $\gamma = \gamma'$ $b = b'$

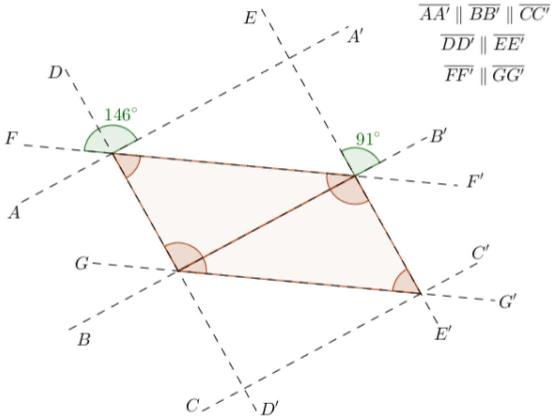
c) **Ángulo, lado, ángulo (ALA)**. Dos triángulos son congruentes si dos ángulos y el lado adyacente a ellos, en uno de los triángulos, son iguales a sus correspondientes en el otro triángulo.



$\alpha = \alpha'$ $b = b'$ $\gamma = \gamma'$

Ejemplo

Dados los siguientes triángulos indica si cumple con la congruencia.



$\overline{AA'} \parallel \overline{BB'} \parallel \overline{CC'}$

$\overline{DD'} \parallel \overline{EE'}$

$\overline{FF'} \parallel \overline{GG'}$

	Sí	No	Ángulos	
a) Lado, lado, lado	☐	☐	________	________
b) Lado, ángulo, lado	☐	☐	________	________
c) Ángulo, lado, ángulo	☐	☐	________	________

Los triángulos semejantes son aquellos que son iguales en forma, pero diferentes en tamaño.

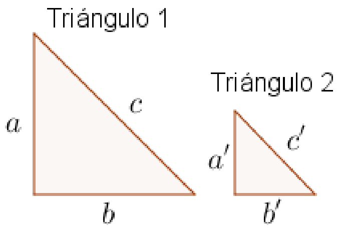


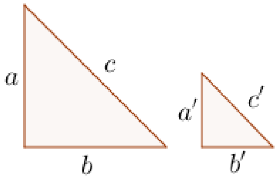
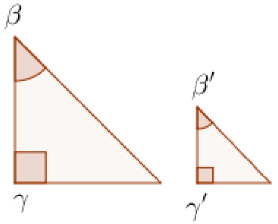
Ilustración 4. Dos triángulos semejantes.

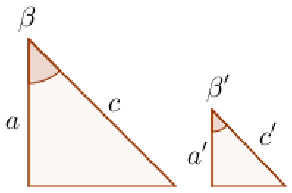
La ilustración 6 muestra dos triángulos semejantes. Para que dos triángulos sean semejantes, deben cumplirse dos condiciones.

1) Sus ángulos correspondientes son iguales en magnitud.
2) Sus lados correspondientes son proporcionales en longitud.

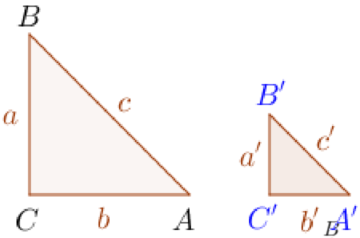
Se puede determinar si dos triángulos son semejantes con los siguientes teoremas.

Sean ΔABC y $\Delta A'B'C'$ dos triángulos, se determinan

Teorema	Ilustracion	Expresión matemática
1. Dos triángulos son semejantes si sus tres lados correspondientes son proporcionales.		Si $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$, entonces $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$
2. Dos triángulos son semejantes si tienen dos ángulos correspondientes iguales en magnitud.		Si $\gamma=\gamma'$ y $\beta=\beta'$, entonces $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

3. Dos triángulos son semejantes si tienen dos lados proporcionales y los ángulos entre ellos son iguales.		Si $\beta = \beta'$, $a = a'$ y $c = c'$, entonces $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

La proporción entre los lados de triángulos se denota como



$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

La notación matemática usada para indicar que dos triángulos son congruentes es $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$; donde el símbolo $\sim$ significa *semejante a*; además, A, B, C, A', B' y C' son los vértices de cada triángulo. Como se muestra en la ilustración 7, donde se indican dos triángulos semejantes y que cumplen con las propiedades mencionadas.

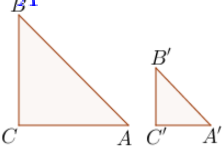
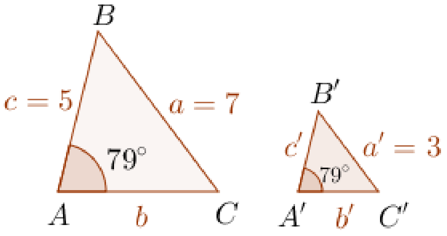


Ilustración 5. **$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$**

Ejemplos

1. Los siguientes triángulos son proporcionales, determinar la longitud de c'



Se determinan las proporciones en base a los datos dados

$$\frac{a}{a'} = \frac{c}{c'}$$

Se sustituyen los datos dados

$$\frac{7}{3} = \frac{5}{c'}$$

Se despeja c'

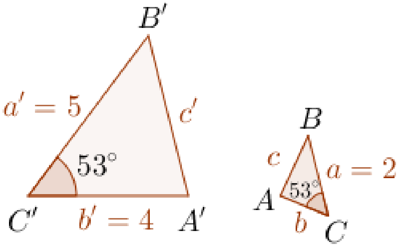
$$c'\frac{7}{3} = 5$$

$$c' = 5\left(\frac{3}{7}\right)$$

$$c' = \frac{15}{7} \approx 2.1429$$

Por lo tanto, la longitud de c' es aproximadamente igual a 2.1429

2. Los siguientes triángulos son proporcionales, determinar la longitud de b



Se determinan las proporciones en base a los datos dados

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$$

Se sustituyen los datos dados

$$\frac{2}{5} = \frac{b}{4}$$

Se despeja b

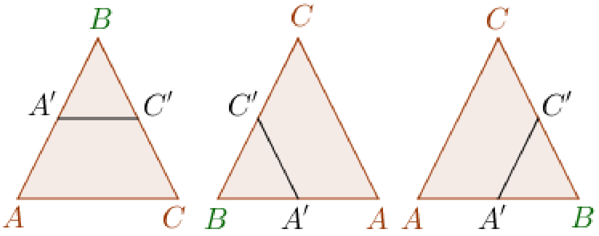
$$4\left(\frac{2}{5}\right) = b$$

$$b = \frac{8}{5} = 1.6$$

Por lo tanto, la longitud de b es igual a 1.6

2.1.2 Teorema de Tales

Para todo triángulo en el cual se trace una recta, sobre él, paralela a cualquiera de sus lados, el triángulo que se forma es paralelo al primero.



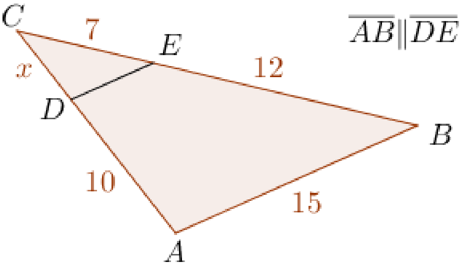
Si $\overline{AC} \parallel \overline{A'C'}$, entonces

$$\Delta ABC \sim \Delta A'BC'$$

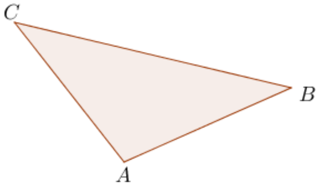
Ilustración 6. Línea paralela a cualquier lado

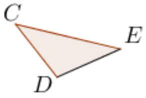
Ejemplos

1. Determinar el valor de x

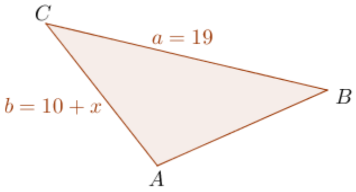


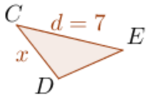
Se distinguen dos triángulos





donde





Por proporcionalidad de triángulos

$$\frac{a}{d} = \frac{b}{x}$$

Se sustituyen valores

$$\frac{19}{7} = \frac{10 + x}{x}$$

Todo se multiplica por x

$$x\left(\frac{19}{7}\right) = 10 + x$$

Se multiplica $x\left(\frac{19}{7}\right)$

$$\frac{19}{7}x = 10 + x$$

Se resta x

$$\frac{19}{7}x - x = 10$$

Se retan términos semejantes

$$\frac{12}{7}x = 10$$

Todo se multiplica por 7

$$12x = 10(7)$$

Se multiplica $10(7)$

$$12x = 70$$

Todo se multiplica por 12

$$x = \frac{70}{12}$$

Se divide $\frac{70}{12}$

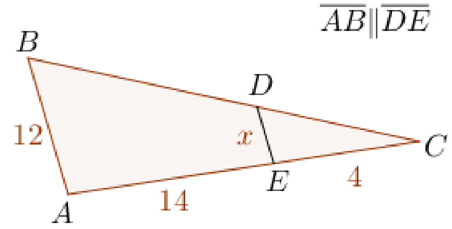
$$x = \frac{35}{6} \approx 5.8333$$

Ejercicios

Demostrar el valor de x en cada ejercicio.

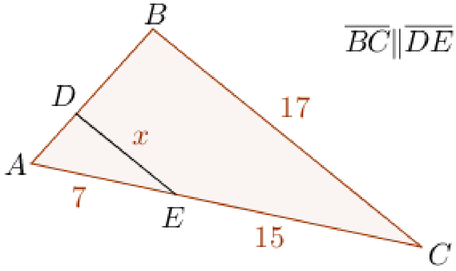
Ejercicio — Solución

1.



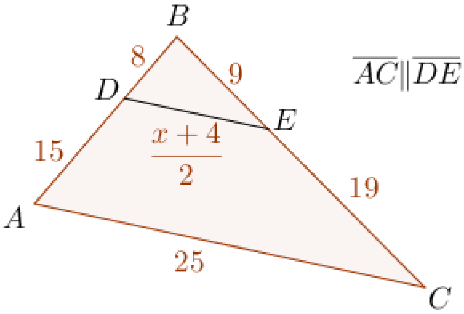
$$x = \frac{8}{3} \approx 2.7$$

2.



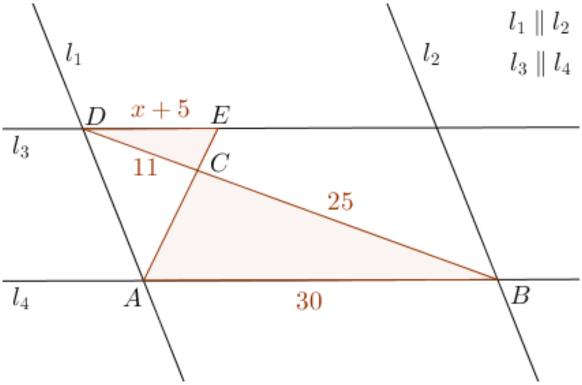
$$x = \frac{119}{22} \approx 5.4091$$

3.



$$x = \frac{169}{14} \approx 12.0714$$

4.



$$x = \frac{41}{5} = 8.2$$

2.1.3 Triángulo rectángulo

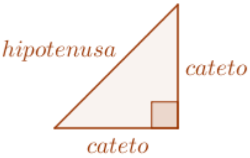


Ilustración 7. Triángulo rectángulo

En el triángulo rectángulo, los lados que forman el ángulo recto se llaman catetos y el lado opuesto a este se llama hipotenusa.

Para estudiar los triángulos rectángulos se usa el teorema de Pitágoras, y las funciones trigonométricas $\operatorname{sen}\theta$, $\cos\theta$ y $\tan\theta$

2.1.3.1 Teorema de Pitágoras

En todo triángulo rectángulo la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.

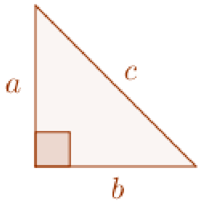


Ilustración 8. Catetos $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$; hipotenusa $\boldsymbol{c}$.

La ilustración 10 muestra un triángulo rectángulo e indica los lados que forman el ángulo recto llamados catetos denotados con a y b; y el lado opuesto al ángulo recto llamado hipotenusa que se indica con c.

Por definición se tiene

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Cuando c es el lado mayor del triángulo, es posible determinar si ese triángulo es rectángulo, obtusángulo o acutángulo; si al aplicar el teorema de Pitágoras sucede que

1. Si $c^2 = a^2 + b^2$, entonces el triángulo es rectángulo.
2. Si $c^2 < a^2 + b^2$, entonces el triángulo es acutángulo.
3. Si $c^2 > a^2 + b^2$, entonces el triángulo es obtusángulo.

Ejemplos

1. Sea el triángulo cuyos lados tienen longitudes de 3, 5 y 7. Determinar si el triángulo es rectángulo, acutángulo u obtusángulo.

Solución

Se toma el lado mayor como c*, es decir*

$$c = 7$$

Aplicando el teorema de Pitágoras

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Se sustituyen valores

$$7^2 = 3^2 + 5^2$$

Se desarrollan los cuadrados

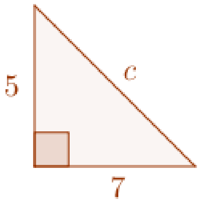
$$49 = 9 + 25$$

Se desarrolla la suma

$$49 > 34$$

Como $c^2 > a^2 + b^2$, por lo tanto el triángulo es obtusángulo

2. Determinar la longitud de la hipotenusa del triángulo

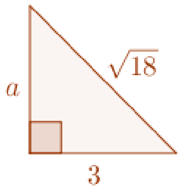


Solucion

Por definición

$c^2 = a^2 + b^2$	*Se sustituyen valores de a y b*
$c^2 = 5^2 + 7^2$	*Se desarrollan los cuadrados*
$c^2 = 25 + 49$	*Se suma*
$c^2 = 74$	*Se aplica raíz cuadrada a toda la expresión*
$c = \sqrt{74}$	*Se determina la raíz cuadrada*
$c \approx 8.6023$	

3. Determinar la longitud del cateto a del triángulo



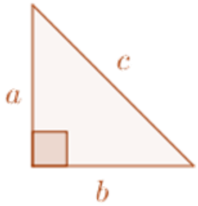
Solución

Por definición

$c^2 = a^2 + b^2$	*Se sustituyen valores de a y c*
$\left(\sqrt{18}\right)^2 = a^2 + 3^2$	*Se desarrollan los cuadrados*
$18 = a^2 + 9$	*Se resta 9*
$18 - 9 = a^2$	*Se desarrolla la resta*
$9 = a^2$	*Se aplica raíz cuadrada a toda la expresión*
$\sqrt{9} = a$	*Se determina la raíz cuadrada*
$3 = a$	

Ejercicios

Sea un triángulo rectángulo, demostrar lo que se indica



	Ejercicio	Solución
1.	$a = 4, b = 9$	$c \approx 9.8489$
2.	$b = 10, c = \sqrt{144}$	$a = 2\sqrt{11}$
3.	$a = 8, c = \sqrt{81}$	$b \approx 4.1231$
4.	$b = 11, c = 20$	$c = 3\sqrt{31}$

2.1.3.2 Uso de funciones trigonométricas

Ilustración 9. Se muestra cómo cambian los catetos según el ángulo de referencia.

Se definen las funciones trigonométricas como

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa}$$

$$\cos\theta = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa}$$

$$\tan\theta = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente}$$

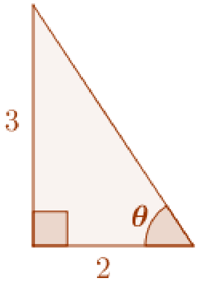
Estas tienen dos finalidades esenciales

1. Conocer la magnitud de un ángulo dados dos lados.
2. Conocer la longitud de un lado dados un ángulo y un lado.

Para elegir la función trigonométrica correcta es necesario conocer dos datos e identificar el dato que se quiere determinar.

Ejemplos

1. Determinar la magnitud del ángulo indicado en el triángulo rectángulo.



Solución

Se puede observar que los datos con que se cuenta son

$$cateto\ adyacente = 2$$

$$cateto\ opuesto = 3$$

La función trigonométrica que cumple para estos dos datos es

$$\tan\theta = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente}$$

Se sustituyen valores

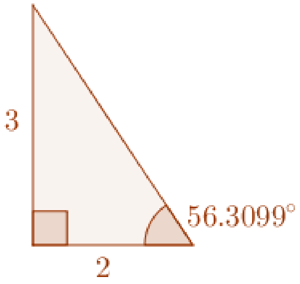
$$\tan\theta = \frac{3}{2}$$

Se aplica $tan^{-1}\,\theta$ *en ambos lados de igual*

$$\theta = \arctan\frac{3}{2}$$

Se aplica $tan^{-1}\,\frac{3}{2}$

$$\theta \approx 56.3099°$$



Es posible determinar el ángulo restante, recordando que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a $180°$, *por lo tanto*

$$90° + 56.3099° + \beta = 180°$$

Se suma

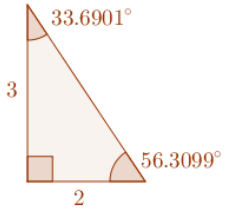
$$146.3099° + \beta = 180°$$

Se resta $146.3099°$

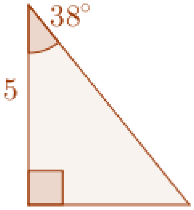
$$\beta = 180° - 146.3099°$$

Se resta

$$\beta \approx 33.6901°$$



2. Determinar la longitud de la hipotenusa en el triángulo rectángulo.



Solución

Se puede observar que los datos con que se cuenta son

$$cateto\ adyacente = 5$$

$$angulo = 38°$$

$$hipotenusa = ?$$

La función trigonométrica que cumple para estos datos es

$$\cos\theta = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa}$$ *Se sustituyen valores*

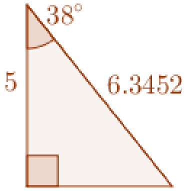
$$\cos 38° = \frac{5}{hipotenusa}$$ *Se aplica* $\cos 38°$

$$0.7880 \approx \frac{5}{hipotenusa}$$ *Se multiplica por hipotenusa*

$$(0.7880)hipotenusa \approx 5$$ *Se divide entre* 0.7880

$$hipotenusa \approx \frac{5}{0.7880}$$ *Se divide* $\frac{5}{0.7880}$

$$hipotenusa \approx 6.3452$$



Es posible determinar el ángulo restante, recordando que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180°*, por lo tanto*

$$90° + 38° + \beta = 180°$$ *Se suma*

$$128° + \beta = 180°$$ *Se resta* 128°

$$\beta = 180° - 128°$$ *Se resta* 180° − 128°

$$\beta \approx 52°$$

Para determinar el cateto restante, se puede aplicar el teorema de Pitágoras o una función trigonométrica. Por función trigonométrica.

$$cateto\ adyacente = 5$$

$$angulo = 38°$$

$$cateto\ opuesto = ?$$

La función trigonométrica que cumple para estos datos es

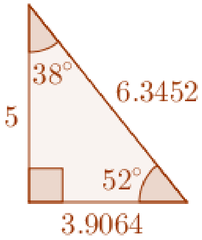
$$\tan\theta = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente}$$ *Se sustituyen valores*

$$\tan 38° = \frac{cateto\ opuesto}{5}$$ *Se aplica* tan 38°

$$0.7812 \approx \frac{cateto\ opuesto}{5} \qquad \textit{Se multiplica } 5$$

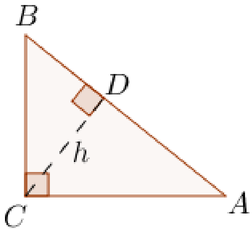
$$5(0.7812) \approx cateto\ opuesto \qquad \textit{Se multiplica } 5(0.7812)$$

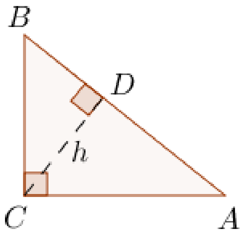
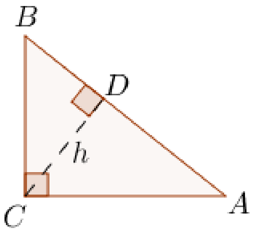
$$3.9064 \approx cateto\ opuesto$$



2.1.3.3 Teoremas de semejanza en triángulos rectángulos

Si ΔABC un triángulo rectángulo y h la altura sobre la hipotenusa; entonces se determinar los siguientes teoremas sobre él.

Teorema	Ilustracion	Expresión matemática
1. Al trazar h sobre ΔABC, se forman dos triángulos rectángulos semejantes entre sí y al dado.		$\Delta ABC \sim \Delta BCD$ $\Delta ABC \sim \Delta ACD$ $\Delta ACD \sim \Delta BCD$

2. La longitud de cualquier cateto es la media proporcional de la hipotenusa interceptado por h, y el lado adyacente a ese cateto.		$\overline{BC}^2 = \overline{AD} \cdot \overline{BD}$ $\overline{AC}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{AD}$
3. h es la media proporcional entre la medida de los segmentos de la hipotenusa.		$h^2 = \overline{AD} \cdot \overline{BD}$

2.1.4 Triángulos oblicuángulos

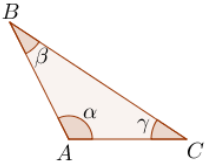


Ilustración 10. Triángulo oblicuángulo

Son los triángulos que no tienen ángulos rectos, como el que se muestra en la figura 12.

Para estudiarlos se siguen la *ley de los senos* y la *ley de los cosenos*.

2.1.4.1 Ley de los senos

> En todo triángulo oblicuángulo (ilustración 13), la razón entre el seno de un ángulo y el lado opuesto a ese ángulo es igual a la razón entre el seno de otro ángulo y el lado opuesto a ese otro ángulo.

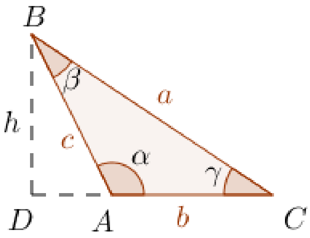


Ilustración 11. Triángulo oblicuángulo

Es decir, que para todo triángulo que no es recto en ninguno de sus ángulos, se define como

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha}=\frac{b}{\operatorname{sen}\beta}=\frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}$$

De donde

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha}=\frac{b}{\operatorname{sen}\beta} \qquad \frac{a}{\operatorname{sen}\alpha}=\frac{c}{\operatorname{sen}\gamma} \qquad \frac{b}{\operatorname{sen}\beta}=\frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}$$

Para aplicar cualquiera de estas tres fórmulas, es necesario conocer tres de los cuatro datos y de esta forma se aplica la fórmula apropiada.

Cabe mencionar que la ley de los senos también puede escribirse como

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a}=\frac{\operatorname{sen}\beta}{b}=\frac{\operatorname{sen}\gamma}{c}$$

De donde

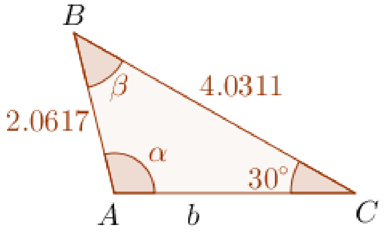
$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a}=\frac{\operatorname{sen}\beta}{b} \qquad \frac{\operatorname{sen}\alpha}{a}=\frac{\operatorname{sen}\gamma}{c} \qquad \frac{\operatorname{sen}\beta}{b}=\frac{\operatorname{sen}\gamma}{c}$$

Se puede usar la ley de los senos para dos finalidades

1. Determinar la magnitud de un ángulo dados tres valores.
2. Determinar la longitud de un lado dados tres valores.

Ejemplos

1. Dado el siguiente triángulo, determinar los datos indicados



Solución

Los datos que se tienen son

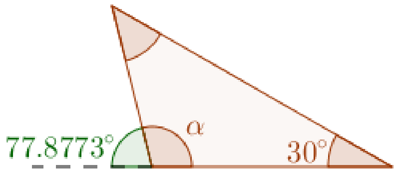
$a = 4.0311 \qquad b = ? \qquad c = 2.0617$

$\alpha = ? \qquad \beta = ? \qquad \gamma = 30°$

Por la ley de los senos se puede determinar α

$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{c}$	*Se sustituyen valores*
$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{4.0311} = \frac{\operatorname{sen}30°}{2.0617}$	*Se determinar* $\operatorname{sen}30°$
$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{4.0311} = \frac{0.5}{2.0617}$	*Se divide* $\frac{0.5}{2.0617}$
$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{4.0311} \approx 0.2425$	*Se multiplica por* 4.0311
$\operatorname{sen}\alpha \approx 0.2425(4.0311)$	*Se multiplica*
$\operatorname{sen}\alpha \approx 0.9777$	*Se aplica* sen^{-1}
$\alpha \approx \operatorname{sen}^{-1}(0.9777)$	*Se determina* sen^{-1} ⬚
$\alpha \approx 77.8773°$	

El ángulo obtenido es



Por lo tanto

$$\alpha = 180° - 77.8773°$$

$$\alpha = 102.1227°$$

Para determinar β

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

Se sustituyen valores

$$102.1227° + \beta + 30° = 180°$$

Se suman ángulos

$$\beta + 132.1227° = 180°$$

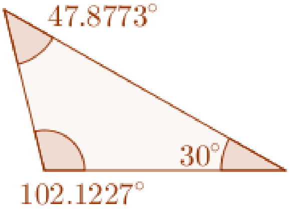
Se resta 132.1227°

$$\beta = 180° - 132.1227°$$

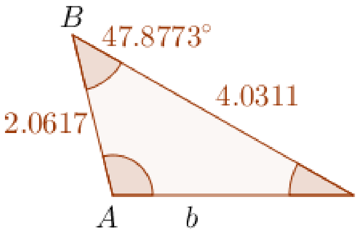
Se resta

$$\beta = 47.8773°$$

Por lo tanto



Ahora se aplica ley de senos para calcular b



$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta}$$

Se sustituyen valores

$$\frac{4.0311}{\operatorname{sen} 102.1227°} = \frac{b}{\operatorname{sen} 47.8773°}$$

Se aplican sen ⬚

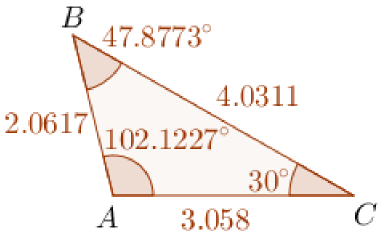
$$\frac{4.0311}{0.9777} \approx \frac{b}{0.7417}$$ *Se divide* $\frac{4.0311}{0.9777}$

$$4.123 \approx \frac{b}{0.7417}$$ *Se multiplica por* 0.7417

$$4.123(0.7417) \approx b$$ *Se multiplica*

$$3.058 \approx b$$

Por lo tanto



Ejercicios

Dada la información del triángulo determinar los datos faltantes y dibujar el triángulo.

	Ejercicio			*Solución*
1.	$a = 3$	$b = 5.24$	$\alpha = 29.2°$	$c \approx 3$ $\beta \approx 121.68°$ $\gamma \approx 29.11°$
2.	$b = 2.29$	$c = 3.08$	$\beta = 43.12°$	$a \approx 3.14,$ $\alpha \approx$ $69.68°$ $\gamma \approx$ $67.18°$
3.	$a = 4.27$	$c = 2.53$	$\gamma = 33.5°$	$b \approx 2.64$ $\alpha \approx$ $111.42°$ $\beta \approx$ $35.07°$

4. $a = 4.4$ $b = 2.81$ $\beta = 39.45°$

$c \approx 3.17$
$\alpha \approx 94.73°$
$\gamma \approx 45.8°$

5. $b = 5.88$ $c = 4.98$ $\gamma = 43.39°$

$a \approx 7.18$
$\alpha \approx 82.32°$
$\beta \approx 54.27°$

2.1.4.2 Ley de los cosenos

El cuadrado de la longitud de cualquier lado de un triángulo cualesquiera es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los otros dos lados, menos el doble producto de las longitudes de los otros dos lados multiplicado por el coseno del ángulo comprendido entre ellos.

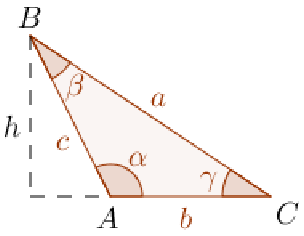


Ilustración 12. Triángulo oblicuángulo.

La ilustración 14 muestra un triángulo oblicuángulo, en donde la *ley de los cosenos* puede definirse de la siguiente forma

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$

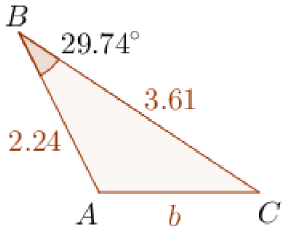
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ac\cos\gamma$$

Puede usarse para determinar

1. La longitud de un lado del triángulo dados los otros dos lados y el ángulo entre ellos.
2. Un ángulo dados los dos lados que lo forman.

Ejemplos

1. Dado el siguiente triángulo, determinar b



Solución

Los datos con que se cuenta son

$a = 3.61$ $c = 2.24$ $\beta = 29.74°$

Por la ley de los cosenos

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$ *Sustituyendo*

$$b^2 = (3.61)^2 + (2.24)^2 - 2(3.61)(2.24)\cos 29.74°$$ *Desarrollando*

$$b^2 \approx 13.0321 + 5.0176 - 16.1728(0.87)$$

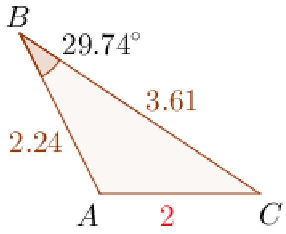
$$b^2 \approx 18.0497 - 14.0703$$

$$b^2 \approx 3.9793$$ *Se despeja b*

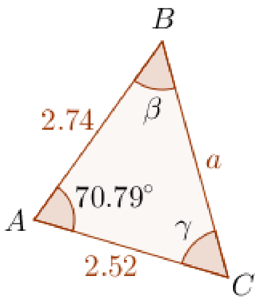
$$b \approx \sqrt{3.9793}$$

$$b \approx 1.9948 \approx 2$$

Por lo tanto



2. Dado el siguiente triángulo, determinar los datos faltantes



Solución

Los datos con que se cuenta son

$b = 2.52$ $\qquad c = 2.74$ $\qquad \alpha = 70.79°$

Por la ley de los cosenos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

Sustituyendo

$$a^2 = (2.52)^2 + (2.74)^2 - 2(2.52)(2.74)\cos 70.79°$$

Desarrollando

$$a^2 \approx 6.3504 + 7.5076 - 13.8096(0.33)$$

$$a^2 = 13.858 - 4.5731$$

$$a^2 = 9.2848$$

Se despeja a

$$a \approx \sqrt{9.2848}$$

$$a \approx 3.05$$

Para determinar β o γ se puede usar la ley de los coseno o la ley de los senos, es opcional. Para este ejemplo se determinará de ambas formas.
Para determinar β

Por ley de cosenos

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$

$$2.52^2 = 3.05^2 + 2.74^2 - 2(3.05)(2.74)\cos\beta$$

$$6.3504 = 9.3025 + 7.5076 - 16.714\cos\beta$$

Por ley de senos

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{b}$$

$$\frac{\operatorname{sen}70.79°}{3.05} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{2.52}$$

$$6.3504 = 16.8101 - 16.714\cos\beta$$

$$6.3504 - 16.8101 = -16.714\cos\beta$$

$$-10.4597 = -16.714\cos\beta$$

$$\frac{-10.4597}{-16.714} = \cos\beta$$

$$0.6258 \approx \cos\beta$$

$$\cos^{-1}(0.8602) \approx \beta$$

$$51.37^\circ \approx \beta$$

$$\frac{0.9443}{3.05} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{2.52}$$

$$0.3096 \approx \frac{\operatorname{sen}\beta}{2.52}$$

$$0.3096(2.52) \approx \operatorname{sen}\beta$$

$$0.7802 \approx \operatorname{sen}\beta$$

$$\operatorname{sen}^{-1}(0.7802) \approx \beta$$

$$51.37^\circ \approx \beta$$

Para determinar γ

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

Se sustituyen valores

$$70.79^\circ + 51.37^\circ + \gamma \approx 180^\circ$$

Se suma

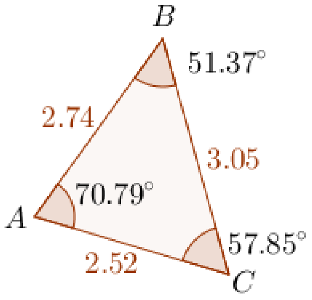
$$122.16^\circ + \gamma \approx 180^\circ$$

Se despeja γ

$$\gamma \approx 180^\circ - 122.16^\circ$$

$$\gamma \approx 57.85^\circ$$

Por lo tanto



Ejercicios

Dada la información del triángulo determinar los datos faltantes y dibujar el triángulo.

	Ejercicio	*Solución*
1.	$a = 2.38$ $b = 2.52$ $\gamma = 88.05°$	$c \approx 3.41$ $\alpha \approx 44.19°$ $\beta \approx 47.76°$
2.	$b = 4.53$ $c = 3.41$ $\alpha = 38.04°$	$a \approx 2.8$ $\beta \approx$ $93.35°$ $\gamma \approx$ $48.62°$
3.	$a = 2.8$ $c = 2.93$ $\beta = 135.19°$	$b \approx 5.3$ $\alpha \approx$ $21.87°$ $\gamma \approx 22.95°$
4.	$a = 2.24$ $b = 2.24$ $\gamma = 45.8°$	$c \approx 3.17$ $\alpha \approx 94.73°$ $\beta \approx 39.45°$

2.1.4.3 Ley de las tangentes

Sea el triángulo ABC, y sus respectivos ángulos, como el que se muestra en la ilustración 15, se definen

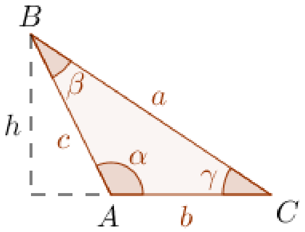


Ilustración 13. Triángulo oblicuángulo.

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\tan\frac{\alpha-\beta}{2}}{\tan\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

$$\frac{a-c}{a+c} = \frac{\tan\frac{\alpha-\gamma}{2}}{\tan\frac{\alpha+\gamma}{2}}$$

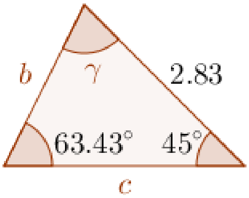
$$\frac{b-c}{b+c}=\frac{\tan\frac{\beta-\gamma}{2}}{\tan\frac{\beta+\gamma}{2}}$$

Puede usarse para determinar

1. La longitud de un lado del triángulo dado otro lado y el ángulo entre ellos.
2. Un ángulo dados los dos lados que lo forman.

Ejemplos

1. Dado el siguiente triángulo, determinar b, c y γ



Solución

Los datos con que se cuenta son

$a = 2.83 \qquad \alpha = 63.43° \qquad \beta = 45°$

Se determina el ángulo γ

$$\alpha+\beta+\gamma = 180° \qquad \textit{sustituyendo}$$

$$63.43° + 45° + \gamma = 180° \qquad \textit{Se resuelve}$$

$$108.43° + \gamma = 180°$$

$$\gamma = 180° - 108.43°$$

$$\gamma = 71.57°$$

Se aplica ley de tangente para calcular b

$\dfrac{a-b}{a+b}=\dfrac{\tan\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{\tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}}$	*Se sustituyen valores*
$\dfrac{2.83-b}{2.83+b}=\dfrac{\tan\dfrac{63.43°-45°}{2}}{\tan\dfrac{63.43°+45°}{2}}$	*Se restan y se suman los ángulos*
$\dfrac{2.83-b}{2.83+b}=\dfrac{\tan\dfrac{18.43°}{2}}{\tan\dfrac{108.43°}{2}}$	*Se divide cada ángulos entre dos*
$\dfrac{2.83-b}{2.83+b}\approx\dfrac{\tan 9.215°}{\tan 54.215°}$	*Se determinar* tan ⬚
$\dfrac{2.83-b}{2.83+b}\approx\dfrac{0.1622}{1.3773}$	*Se divide* $\frac{0.1622}{1.3773}$
$\dfrac{2.83-b}{2.83+b}\approx 0.1178$	*Se multiplica por* $2.83+b$
$2.83-b\approx 0.1178(2.83+b)$	*Se multiplica* $0.1178(2.83+b)$
$2.83-b\approx 0.3333+0.1178b$	*Se despeja b*
$2.83-0.3333\approx 0.1178b+b$	
$2.4967\approx 1.1178b$	
$\dfrac{2.4967}{1.1178}\approx b$	

$$2.24 \approx b$$

Se aplica ley de tangente para calcular c

$$\frac{a-c}{a+c} = \frac{\tan\frac{\alpha-\gamma}{2}}{\tan\frac{\alpha+\gamma}{2}}$$

Se sustituyen valores

$$\frac{2.83-c}{2.83+c} = \frac{\tan\frac{63.43°-71.57°}{2}}{\tan\frac{63.43°-71.57°}{2}}$$

Se restan y se suman los ángulos

$$\frac{2.83-c}{2.83+c} = \frac{\tan\frac{-8.14°}{2}}{\tan\frac{135°}{2}}$$

Se divide cada ángulos entre dos

$$\frac{2.83-c}{2.83+c} = \frac{\tan(-4.07°)}{\tan 67.5°}$$

Se determinar $\tan \square$

$$\frac{2.83-c}{2.83+c} \approx \frac{-0.07}{2.4142}$$

Se divide $\frac{-0.07}{2.4142}$

$$\frac{2.83-c}{2.83+c} \approx -0.029$$

Se multiplica por $2.83+c$

$$2.83 - c \approx -0.029(2.83+c)$$

Se multiplica $-0.029(2.83+c)$

$$2.83 \approx -0.0821 - 0.029c$$

Se despeja c

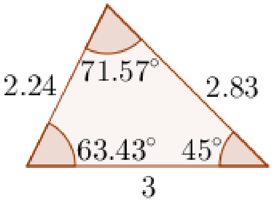
$$2.83 + 0.0821 \approx -0.029c + c$$

$$2.9121 \approx 0.971c$$

$$\frac{2.9121}{0.971} \approx c$$

$$3 = c$$

Por lo tanto



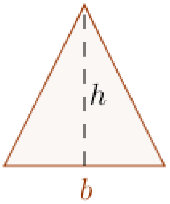
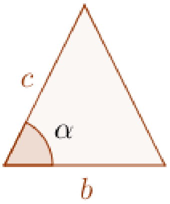
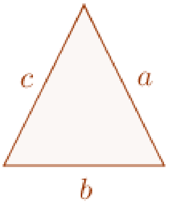
Ejercicios

Determinar los datos que se indican usando las leyes de las tangentes y dibujar cada triángulo.

1. $c = 3, \alpha = 51.72°, \gamma = 51.3°$ a, b, β
2. $b = 4.59, \alpha = 70.7°, \beta = 71.19°$ a, c, γ
3. $a = 2.75, \alpha = 35.97°, \beta = 100.89°$ b, c, γ
4. $c = 3.24, \beta = 140.99°, \gamma = 15.53°$ a, b, α
5. $b = 5.47, \beta = 99.45°, \gamma = 30.93°$ a, c, α

2.1.4.4 Áreas de triángulos

Dependiendo de los datos del triángulo con que se cuente, es posible determinar su área en diferentes formas,

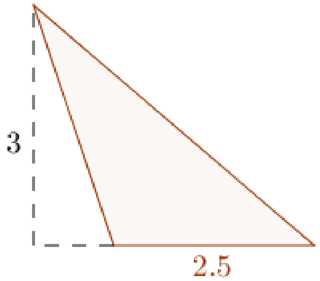
	Ilustración	Descripción
1)		Si se conoce la base b y la altura h, entonces el área es igual al producto de la base por la altura dividido entre dos. $$A = \frac{b \cdot h}{2}$$
2)		Si se conocen dos lados y el ángulo comprendido entre ellos, entonces el área es igual a la mitad del producto de los dos lados por el seno del ángulo entre ellos. $$A = \frac{b \cdot c \cdot \operatorname{sen} \alpha}{2}$$
3)		Si se conocen todos los lados, entonces se utiliza la fórmula de Herón, $$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$ Donde s es la mitad del perímetro $$s = \frac{a+b+c}{2}$$

Recordando que las áreas adquieren las unidades al cuadrado.

Cabe mencionar que existe otra forma para calcular el área del triángulo, que es conociendo sus vértices, pero esto se estudiará en aplicaciones de matrices en álgebra lineal.

Ejemplos

1. Determinar el área del triángulo



Solución

Los datos son

$b = 2.5 \qquad h = 3$

Entonces

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

Se sustituyen valores

$$A = \frac{2.5(3)}{2}$$

Se multiplica

$$A = \frac{7.5}{2}$$

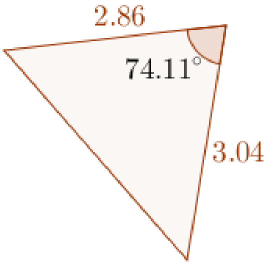
Se divide

$$A = 3.75$$

Por lo tanto, el área del triángulo analizado es

$$A = 3.75\, u^2$$

2. Determinar el área del triángulo



Solución

Los datos son

$b = 2.86 \qquad c = 3.04 \qquad \alpha = 74.11°$

Entonces

$$A = \frac{b \cdot c \cdot \operatorname{sen} \alpha}{2}$$ *Se sustituyen valores*

$$A = \frac{(2.86)(3.04) \operatorname{sen} 74.11°}{2}$$ *Se multiplica*

$$A = \frac{(8.6944)(0.9618)}{2}$$

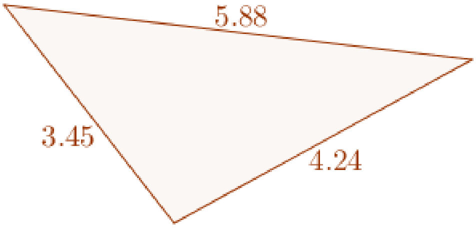
$$A = \frac{8.3623}{2}$$ *Se divide*

$$A = 4.18$$

Por lo tanto, el área del triángulo analizado es

$$A = 4.18\, u^2$$

3. Determinar el área del triángulo



Solución

Los datos son

$$a = 5.88 \qquad b = 4.24 \qquad c = 3.45$$

Entonces

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Donde s es la mitad del perímetro

$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

Primero se determina s sustituyendo valores

$$s = \frac{5.88 + 4.24 + 3.45}{2}$$

Se suma

$$s = \frac{13.57}{2}$$

Se divide

$$s = 6.785$$

Con el valor de s se puede determinar el área

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Sustituyendo valores

$$A = \sqrt{6.785(6.758 - 5.88)(6.785 - 4.24)(6.785 - 3.45)}$$

$$A \approx \sqrt{50.5624}$$

$$A \approx 7.1107$$

Por lo tanto, el área del triángulo analizado es

$$A \approx 7.1107\ u^2$$

Ejercicios

Determinar las áreas de los triángulos y dibujarlos.

	Ejercicio			*Solución*
1.	$b = 4.03$	$c = 4.8$	$\alpha = 55.22°$	$A \approx 7.08\, u^2$
2.	$b = 4.01$	$c = 5.98$	$\alpha = 42.09°$	$A \approx 8.5\, u^2$
3.	$a = 5.38$	$b = 5.79$	$c = 7.83$	$A \approx 15.48\, u^2$
4.	$a = 8.17$	$b = 5.88$	$c = 3.55$	$A \approx 9.22\, u^2$

2.2 Grados y radianes

2.2.1 Definiciones

Un ángulo se define como el conjunto de puntos determinados por dos líneas rectas o semirrectas, que tienen el mismo punto extremo.

La ilustración 16 muestra el ángulo que se forma entre las líneas rectas l_1 y l_2. Mientras que A, B y C son los puntos que identifican al ángulo, en este caso es C el punto extremo.

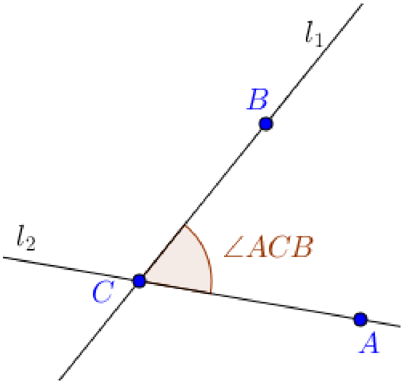


Ilustración 14. Ángulo ACB formado por las rectas l_1 y l_2.

Para denotar ángulos se usan los símbolos

∠	que se lee ángulo
∡	que se lee ángulo medio
∢	que se lee ángulo esférico
∟	que se lee ángulo recto
⊾	que se lee ángulo recto con arco

Generalmente se usan letras griegas minúsculas como α, β, γ o θ para nombrar ángulos.

En un sistema de ejes coordenados como, por ejemplo, un plano cartesiano, los ángulos pueden ser positivos o negativos, esto dependerá de la dirección en que el ángulo gire; si la dirección del ángulo es *contraria a las manecillas del reloj*, entonces el ángulo es positivo, pero si la dirección del ángulo es *igual a las manecillas del reloj*, entonces el ángulo es negativo. (Ilustración 17)

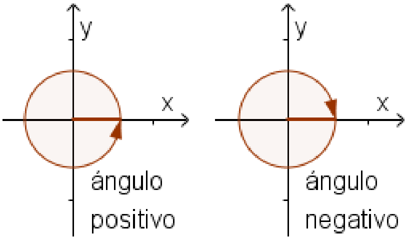
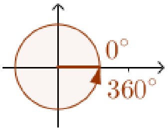


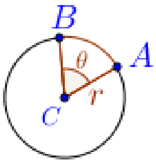
Ilustración 15. Ángulos positivos o negativos según su dirección.

Las unidades de medida más comunes de ángulos son *grados* y *radianes*.

- Los grados se indican con “ ° ” y están dados en un rango de 0° a 360°; es decir, que una *vuelta* completa mide 360°, por lo tanto, un grado está dado por $\frac{1}{360^\circ}$.



- Los radianes son la medida del ángulo central de un círculo subtendido por un arco igual en longitud al radio del círculo; es decir, si se considera una circunferencia de radio r, un ángulo cuyo vértice es el centro de la misma, un arco de la circunferencia limitado por los puntos A y B de magnitud $\widehat{AB} = r$; entonces, se dice que el ángulo θ está subtendido en $\widehat{AB}$ y que el ángulo tiene una medida de un radian.



Relación entre grados y radianes

Para calcular la equivalencia en radianes de 360°, se debe determinar el número de veces que un arco de circunferencia con magnitud igual al radio puede trazarse a los largo de dicha circunferencia; como el perímetro de la circunferencia es $2\pi r$, de aquí se deduce que ese número de veces es 2π. Por lo tanto $360^\circ = 2\pi$ y

1. $180^\circ = \pi \, radián$
2. $1^\circ = \frac{\pi}{180^\circ} \, radián \approx 0.017453292 \ldots \, radián \approx 0.0175 \, radián$
3. $1 \, radián = \frac{180^\circ}{\pi} radián \approx 57.29577951 \ldots^\circ \approx 57.2958^\circ$

Algunos grados especiales y sus equivalencias en radianes son

Grados	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
Radianes	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

Grados	$180°$	$210°$	$225°$	$240°$	$270°$	$300°$	$315°$	$330°$	$360°$
Radianes	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π

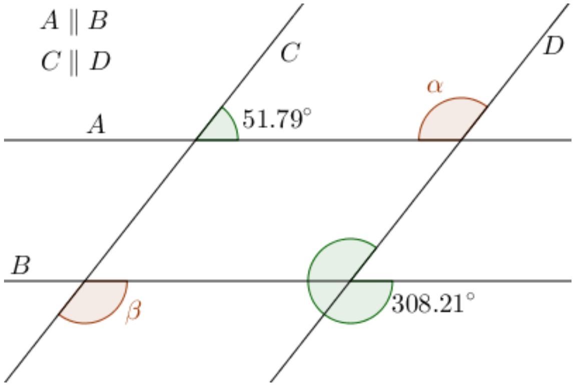
Los ángulos reciben un nombre según su magnitud, y estos pueden ser

Nombre	Grados	Radianes
Ángulo agudo	$0° < \theta < 90°$ Ejemplos $\theta = 12°, \theta = 53°$	$0 < \theta < \pi$ Ejemplos $\theta = \frac{1}{4}\pi, \theta = \frac{2}{5}\pi$
Ángulo recto	$\theta = 90°$	$\theta = \frac{1}{2}\pi$
Ángulo obtuso	$90° < \theta < 180°$ Ejemplos $\theta = 100°, \theta = 145°$	$\frac{1}{2}\pi < \theta < \pi$ Ejemplos $\theta = \frac{3}{4}\pi, \theta = \frac{4}{5}\pi$
Ángulos complementarios	$\alpha + \beta = 90°$ Ejemplo $\alpha = 50°, \beta = 40°$ $50° + 40° = 90°$	$\alpha + \beta = \frac{1}{2}\pi$ Ejemplo $\alpha = \frac{1}{4}\pi, \beta = \frac{1}{4}\pi$ $\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2}\pi$
Ángulos suplementarios	$\alpha + \beta = 180°$ Ejemplo $\alpha = 100°, \beta = 80°$ $100° + 80° = 180°$	$\alpha + \beta = \frac{1}{2}\pi$ Ejemplo $\alpha = \frac{1}{4}\pi, \beta = \frac{3}{4}\pi$

		$\frac{1}{4}\pi + \frac{3}{4}\pi = \pi$

Ejemplo

1. Determinar los ángulos α y β indicados en la figura



Solución

El ángulo suplementario a α es el que corresponde a $51.79°$, por lo tanto

$$\alpha + 51.79° = 180°$$

$$\alpha = 180° - 51.79°$$

$$\alpha = 129.21°$$

El ángulo β también es suplementario a $51.79°$ y además es correspondiente a α, por lo tanto

$$\beta = 129.21°$$

2.2.2 Conversión de grados a radianes

Sea θ el ángulo en grados, la conversión de grados a radianes se define como

$$\theta = \theta\left(\frac{\pi}{180^\circ}\right) \qquad \text{o} \qquad \theta \approx \theta(0.0175)$$

Ejemplo

Convertir el ángulo dado en grados a radianes

1. $\theta = 120^\circ$

Solución

$\theta = \theta\left(\frac{\pi}{180^\circ}\right)$	*Se sustituye*	$\theta \approx \theta(0.0175)$	*Se sustituye*
$120^\circ = 120^\circ\left(\frac{\pi}{180^\circ}\right)$	*Se multiplica*	$120^\circ \approx 120^\circ(0.0175)$	*Se multiplica*
$120^\circ = \frac{120^\circ\,\pi}{180^\circ}$	*Se reduce*	$120^\circ \approx 2.1$	
$120^\circ = \frac{5\,\pi}{6}$			

Ejercicios

Ejercicio	*Solución*
1. $\theta = 105^\circ$	$105^\circ = \frac{7}{12}\pi$ $105^\circ \approx 1.833$
2. $\theta = 53^\circ$	$53^\circ = \frac{53}{180}\pi$ $53^\circ \approx 0.925$

3. $\theta = 80°$

$$80° = \frac{4}{9}\pi$$

$$53° \approx 1.4$$

4. $\theta = 215°$

$$215° = \frac{43}{36}\pi$$

$$215° \approx 3.7525$$

2.2.3 Conversión de radianes a grados

Sea θ el ángulo en radianes, la conversión de radianes a grados se define como

$$\theta = \theta\left(\frac{180°}{\pi}\right) \qquad \text{o} \qquad \theta \approx \theta(57.2958°)$$

Ejemplo
Convertir el ángulo dado en radianes a grados

1. $\theta = \frac{\pi}{4}$

Solución

$\theta = \theta\left(\frac{180°}{\pi}\right)$ *Se sustituye*

$\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}\left(\frac{180°}{\pi}\right)$ *Se multiplica*

$\frac{\pi}{4} = \frac{180°\pi}{4\pi}$ *Se reduce*

$\frac{\pi}{4} = 45°$

$\theta \approx \theta(57.2958°)$ *Se sustituye*

$\frac{\pi}{4} \approx \frac{\pi}{4}(57.2958°)$ *Se multiplica*

$\frac{\pi}{4} \approx 45°$

Ejercicios

Convertir los ángulos dados en radianes a grados.

	Ejercicio	*Solución*
1.	$\theta = \frac{7}{8}\pi$	$\frac{7}{8}\pi = 157.5°$
2.	$\theta = \frac{3}{2}\pi$	$\frac{3}{2}\pi = 270°$
3.	$\theta = 3.927$	$3.927 \approx 225°$
4.	$\theta = 4.42$	$4.42 \approx 253°$

2.3 Funciones trigonométricas

Las funciones trigonométricas tuvieron su origen histórico en las relaciones existentes entre el ángulo no recto de un triángulo rectángulo y sus respectivos lados.

Las funciones trigonométricas que se derivan de esta relación son $seno$, $coseno$ y $tangente$; que se denotan o se abrevian como sen, cos y tan, respectivamente. A estas funciones se agrega el símbolo θ para indicar la relación entre el ángulo y los lados. Por ejemplo, $\text{sen}\,\theta$ se refiere a la relación entre el ángulo y la razón del cateto opuesto y la hipotenusa. (Ilustración 18)

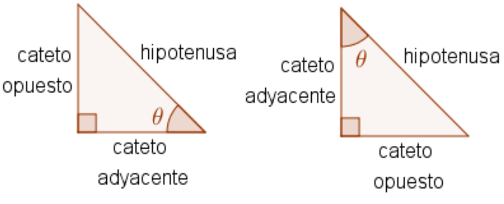


Ilustración 16. Triángulo rectángulo y sus lados.

Las funciones trigonométricas se definen como

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} \qquad \csc\theta = \frac{hipotenusa}{cateto\ opuesto}$$

$$\cos\theta = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa} \qquad \sec\theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}}$$

$$\tan\theta = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} \qquad \cot\theta = \frac{cateto\ adyacente}{cateto\ opuesto}$$

Ejemplo

1. Determina los valores de las funciones trigonométricas restantes si $\cos\theta = \frac{2}{5}$.

Solución

Se sabe que

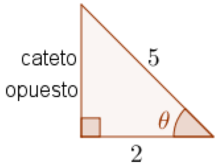
$$\cos\theta = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa}$$

De aquí se tiene que

$$cateto\ adyacente = 2$$

$$hipotenusa = 5$$

Por lo tanto el triángulo es



Para determinar el cateto adyacente se usa el teorema de Pitágoras

$$c^2 = a^2 + b^2$$ *Se sustituyen valores*

$$5^2 = a^2 + 2^2$$ *Se desarrollan cuadrados*

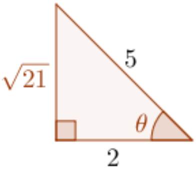
$$25 = a^2 + 4$$ *Se resta 4*

$$25 - 4 = a^2$$ *Se resta*

$$21 = a^2$$ *Se aplica raíz cuadrada*

$$\sqrt{21} = a$$

De tal forma que



Ahora, sustituyendo valores en las funciones trigonométricas

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa}$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{21}}{5}$$

$$\csc\theta = \frac{hipotenusa}{cateto\ opuesto}$$

$$\csc\theta = \frac{5}{\sqrt{21}}$$

$$\cos\theta = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa}$$

$$\cos\theta = \frac{2}{5}$$

$$\sec \theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}}$$

$$\sec\theta = \frac{5}{2}$$

$$\tan\theta = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} \qquad \cot\theta = \frac{cateto\ adyacente}{cateto\ opuesto}$$

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{21}}{2} \qquad \cot\theta = \frac{2}{\sqrt{21}}$$

Algunos ángulos especiales por su exactitud y porque se usan frecuentemente son

θ (grados)	θ (radianes)	$\operatorname{sen}\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	$\csc\theta$	$\sec\theta$	$\cot\theta$
$30°$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$45°$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
$60°$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$90°$	$\frac{\pi}{2}$	1	0	$ind.$	1	$ind.$	0
$180°$	π	0	-1	0	$ind.$	-1	$ind.$

Hasta aquí se ha podido observar que todos los valores que toman las funciones trigonométricas aplicadas a triángulos son positivos; esto se debe a que las longitudes del triángulo siempre son positivas. Pero es posible trasladar las funciones trigonométricas a un plano cartesiano, donde es muy importante su estudio, ya que en dicho plano se deben tomar en cuenta varios aspectos, que se enumeran a continuación.

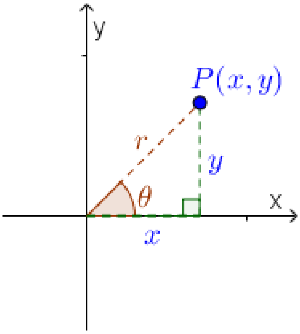


Ilustración 17. Punto en el plano cartesiano.

Sea $P(x, y)$ un punto cualquiera en el plano cartesiano, con coordenadas x, y y la distancia del origen a ese punto dada por $r = \sqrt{x^2 + y^2}$; también, sea θ el ángulo de ese punto $P(x, y)$. Como se muestra en la ilustración 19. Se deducen los siguientes puntos.

1. Al tratarse de un punto en el plano cartesiano, los elementos que son parte de la funciones trigonométricas no se llaman catetos ni hipotenusa, se llaman x, y y r; es decir,

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r} \qquad \csc\theta = \frac{r}{y} \quad \text{con } y \neq 0$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \qquad \sec\theta = \frac{r}{x} \quad \text{con } x \neq 0$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \quad \text{con } x \neq 0 \qquad \cot\theta = \frac{x}{y} \quad \text{con } y \neq 0$$

2. Al determinarse θ es posible obtener un ángulo positivo o negativo; esto dependerá del cuadrante y de la función empleada.

   Esto es porque la dirección de los ángulos es diferente en cada uno de los cuadrantes del plano cartesiano, según la función trigonométrica que se utilice. Como se muestra en la ilustración 20.

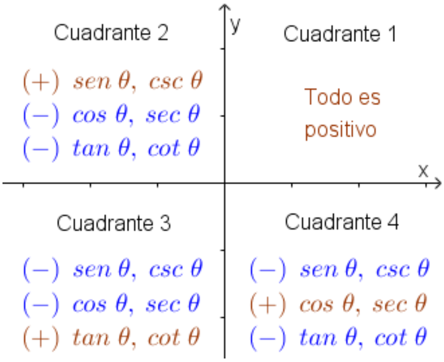
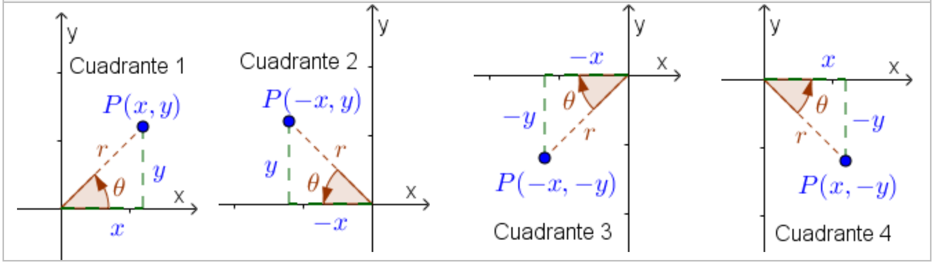


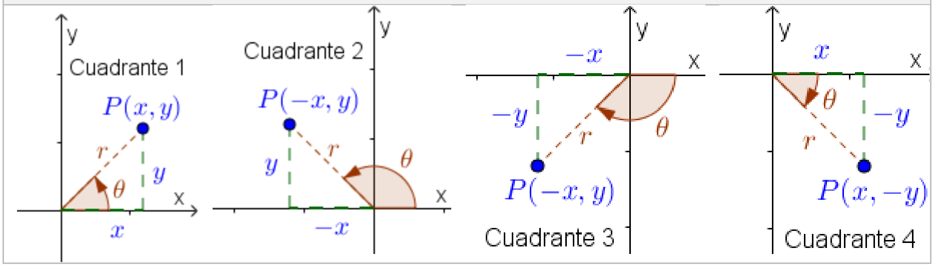
Ilustración 18. Signos de funciones trigonométricas según el cuadrante.

   A continuación se indica cada una de las funciones trigonométricas y su comportamiento en los cuadrantes del plano cartesiano.

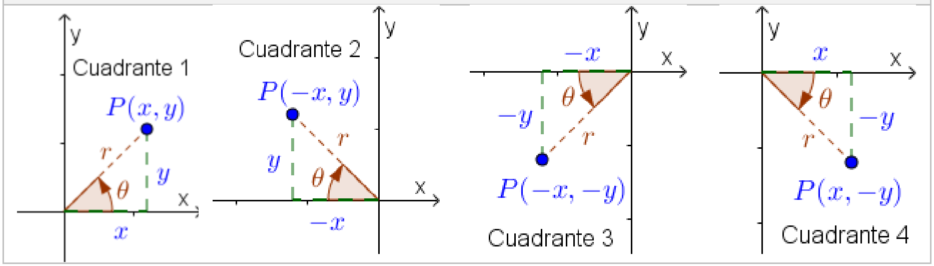
Para sen y csc



Para cos y sec



Para tan y cot



3. En el plano cartesiano, los ángulos pueden escribirse en diferentes formas para referirse al mismo ángulo, por ejemplo, $135° = -225°$. Por lo que se nombra como ángulo principal al que inicia en el semieje x positivo y terminar en la semi recta imaginaria $\overline{0P}$; además debe ser positivo, es decir, que deberá tener una dirección contraria a la dirección de las *manecillas del reloj*.

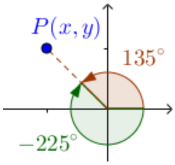
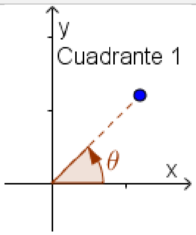
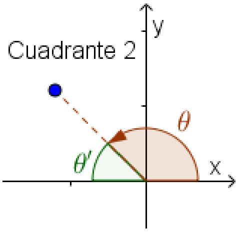
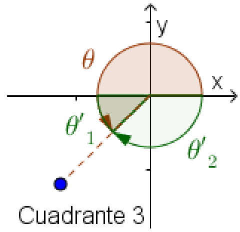
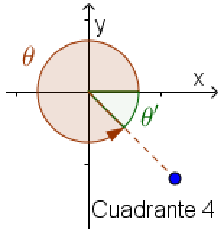


Ilustración 19. Ángulo principal.

4. Para determinar el ángulo principal en el plano cartesiano, se siguen las siguientes reglas.

Sean θ', θ_1' y θ_2' ángulos determinados por funciones trigonométricas,

Cuadrante	sen y csc	cos y sec	tan y cot
	θ es directo	θ es directo	θ es directo
Cuadrante	$sen\ y\, csc$	$cos\ y\, sec$	$tan\ y\, cot$
	$\theta = 180° - \lvert\theta'\rvert$ $\theta = \pi - \lvert\theta'\rvert$	θ es directo	$\theta = 180° - \lvert\theta'\rvert$ $\theta = \pi - \lvert\theta'\rvert$

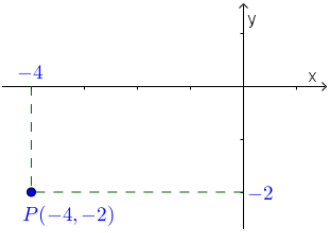
	$\theta = 180° + \lvert\theta_1'\rvert$ $\theta = \pi + \lvert\theta_1'\rvert$	$\theta = 360° - \lvert\theta_2'\rvert$ $\theta = 2\pi - \lvert\theta_2'\rvert$	$\theta = 180° + \lvert\theta_1'\rvert$ $\theta = \pi + \lvert\theta_1'\rvert$
	$\theta = 360° - \lvert\theta'\rvert$ $\theta = 2\pi - \lvert\theta'\rvert$	$\theta = 360° - \lvert\theta'\rvert$ $\theta = 2\pi - \lvert\theta'\rvert$	$\theta = 360° - \lvert\theta'\rvert$ $\theta = 2\pi - \lvert\theta'\rvert$

Ejemplo

1. Determinar los grados del ángulo principal, en el plano cartesiano, del punto $P(-4,-2)$

Solución

Se ubica el punto en el plano cartesiano para conocer el cuadrante en el cual se encuentra P



El punto P *se encuentra en el cuadrante* 3

Para usar las funciones sen $\theta = \frac{y}{r}$ *y cos* $\theta = \frac{x}{r}$ *es necesario calcular* r

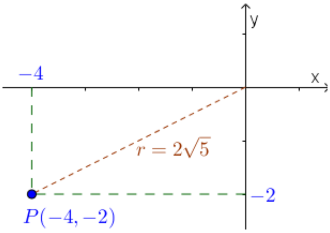
$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ *Se sustituyen valores*

$r = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2}$ *Se desarrollan cuadrados*

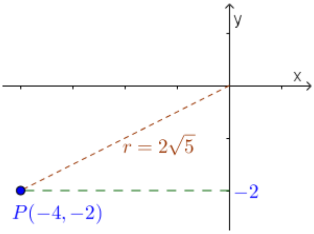
$r = \sqrt{16 + 4}$ *Se suma*

$r = \sqrt{20}$ *Se reduce*

$r = 2\sqrt{5}$



Se determina θ con la función sen θ



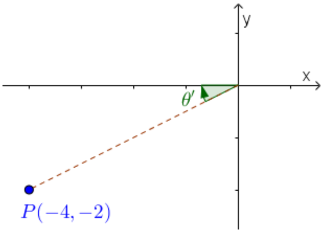
$\text{sen}\,\theta' = \frac{y}{r}$ *Se sustituyen valores*

$\text{sen}\,\theta' = \frac{-2}{2\sqrt{5}}$ *Se reduce*

$\text{sen}\,\theta' = \frac{-1}{\sqrt{5}}$ *Se aplica* $\sin^{-1} \square$

$\theta' = \text{arcsen}\,\frac{-1}{\sqrt{5}}$

$\theta' \approx -26.5651°$



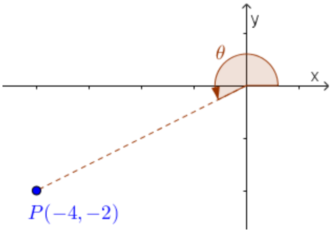
Pero al encontrarse en el cuadrante 3

$\theta = 180° + |\theta'|$ *Se sustituyen valores*

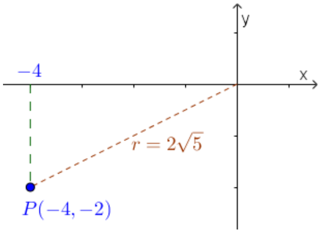
$\theta \approx 180° + |-26.5651°|$ *Se aplica valor absoluto*

$\theta \approx 180° + 26.5651°$ *Se suma*

$\theta \approx 206.5651°$



Se determina θ *con la función cos* θ



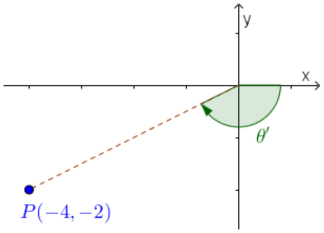
$\cos\theta = \dfrac{x}{r}$ *Se sustituyen valores*

$\cos\theta = \dfrac{-4}{2\sqrt{5}}$ *Se reduce*

$\cos\theta = \dfrac{-2}{\sqrt{5}}$ *Se aplica* $\cos^{-1}$ ⬚

$$\theta = \arccos\frac{-2}{\sqrt{5}}$$

$$\theta \approx 153.4349°$$



Pero al encontrarse en el cuadrante 3

$$\theta = 360° - |\theta|$$

Se sustituyen valores

$$\theta \approx 360° - |153.4349°|$$

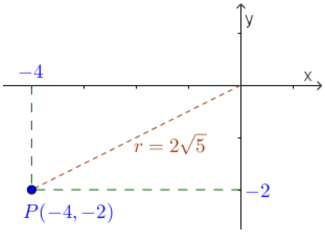
Se aplica valor absoluto

$$\theta \approx 360° - 153.4349°$$

Se resta

$$\theta \approx 206.5651°$$

Se determina θ *con la función* $\tan\theta$



$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

Se sustituyen valores

$$\tan\theta' = \frac{-2}{-4}$$

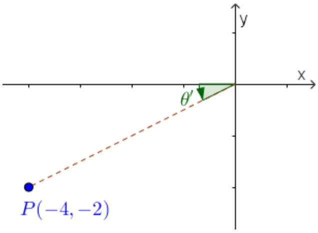
Se reduce

$$\tan\theta' = \frac{1}{2}$$

Se aplica $\tan^{-1}$ ⬚

$$\theta' = \arctan\frac{1}{2}$$

$$\theta' \approx 26.5651°$$



Pero al encontrarse en el cuadrante 3

$\theta = 180° + \lvert\theta\rvert$	*Se sustituyen valores*
$\theta \approx 180° + \lvert 26.5651° \rvert$	*Se aplica valor absoluto*
$\theta \approx 180° + 26.5651°$	*Se suma*
$\theta \approx 206.5651°$	

Ejercicios

Determinar los ángulos en grados y en radianes de los siguientes puntos usando las funciones sen θ, cos θ y tan θ. Graficar.

	Ejercicio	*Solución*
1.	$P(3,3)$	$\theta = 45°$ $\theta = \frac{1}{4}\pi = 0.25$
2.	$P(-2,5)$	$\theta \approx 111.8°$ $\theta \approx \frac{559}{900}\pi \approx 1.95$
3.	$P(\sqrt{3},-4)$	$\theta \approx 293.41°$ $\theta \approx 4.25$

4. $P(-2,5)$ $\theta \approx 155.69°$

$\theta \approx 2.7173$

La siguiente tabla presenta las identidades trigonométricas fundamentales, después, en materias de cálculo se utilizarán el resto.

Identidades Pitagóricas	Identidades tangente y cotangente	Identidades recíprocas
1. $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$	4. $\tan\theta = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$	6. $\csc\theta = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta}$
2. $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$	5. $\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$	7. $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$
3. $1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$		8. $\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$

Estas identidades se usan para reducir funciones trigonométricas a su mínima expresión o para denotarlas en función de otra expresión trigonométrica.

Ejemplos

Calcular o demostrar las equivalencias de las siguientes funciones trigonométricas.

1. $\operatorname{sen}\theta = \cos\theta \cdot \tan\theta$

Solución

$\operatorname{sen}\theta = \cos\theta \cdot \tan\theta$ *Se aplica* $\tan\theta = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$

$\operatorname{sen}\theta = \cos\theta\left(\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\right)$ *Se simplifica*

$\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}\theta$

2. $-\cos^2\theta + 1 = \dfrac{1}{\csc^2\theta}$

Solución

$$-\cos^2\theta + 1 = \frac{1}{\csc^2\theta}$$

Se aplica $sen^2\,\theta + cos^2\,\theta = 1,\ csc^2\,\theta = (csc\,\theta)^2\ y\ 1 = 1^2$

$$\operatorname{sen}^2\theta = \frac{1^2}{(\csc\theta)^2}$$

Se aplica $\dfrac{1^2}{(csc\,\theta)^2} = \left(\dfrac{1}{csc\,\theta}\right)^2$

$$\operatorname{sen}^2\theta = \left(\frac{1}{csc\,\theta}\right)^2$$

Se aplica $\dfrac{1}{csc\,\theta} = sen\,\theta$

$$\operatorname{sen}^2\theta = (\operatorname{sen}\theta)^2$$

$$\operatorname{sen}^2\theta = \operatorname{sen}^2\theta$$

Ejercicios

Demostrar las equivalencias de las siguientes funciones trigonométricas.

Ejercicio

1. $\cos\theta\sec\theta = 1$

2. $\dfrac{\csc\theta}{\sec\theta} = \cot\theta$

3. $(1+\cos\theta)(1-\cos\theta) = \operatorname{sen}^2\theta$

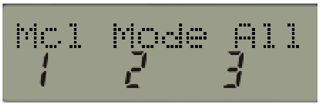
4. $\dfrac{\csc\theta + 1}{\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2\theta} + \csc\theta} = \operatorname{sen}\theta$

2.4 Uso de calculadora científica

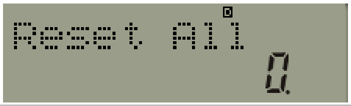
Borrar todas las configuraciones de la calculadora

Series fx-82ms y similares

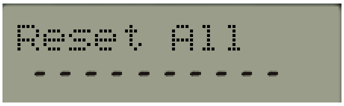
1) qw


Mcl Mode All
1 2 3

2) 3=


Reset All
0.

3) 3

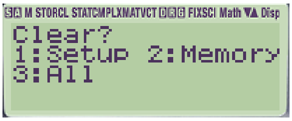

Reset All
----

4) =


0.

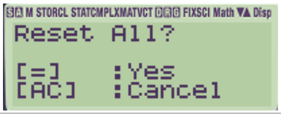
Series fx-82es y similares

1) q9



Clear?
1:Setup 2:Memory
3:All

2) 3

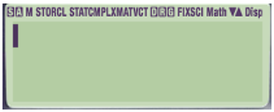


Reset All?
[=] :Yes
[AC] :Cancel

3) =

Reset All
Press [AC] key

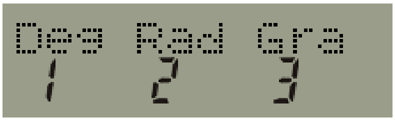
4) C



Configurar la calculadora en grados o radianes

Series fx-82ms y similares

1) w
(cuantas veces sea necesario)



2b) 2
(Rad = radianes)

2a) 1
(Degrees = grados)

2c) 3
(Grad = gradianes, no confundir con grados)

Series fx-82es y similares

1) qw

2b) 4
(Rad = radianes)

2a) 3
(Degrees = grados)

2c) 5
(Grad = gradianes, no confundir con grados)

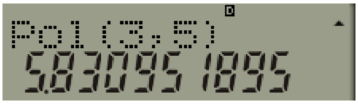
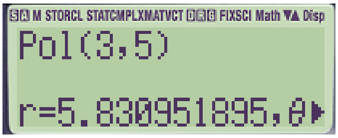
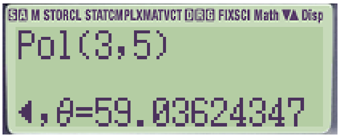
Triángulo rectángulo

1) Calcular hipotenusa conociendo los catetos a (adyacente) y b (opuesto)

eadyacente,opuesto)=

Ejemplo

Sea el triángulo con catetos $a = 3$ y $b = 5$, determinar la hipotenusa c y el ángulo entre el *cateto adyacente* y la *hipotenusa*.

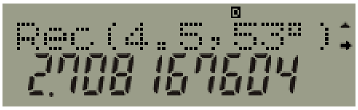
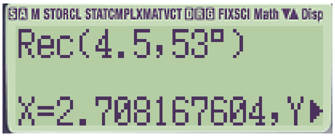
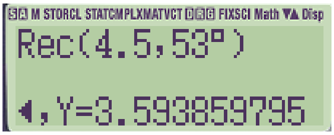
Series fx-82ms y similares	Series fx-82es y similares
e3,5)= $c =$  Pol(3,5) 5.830951895 Gl $\alpha =$  F= 59.03624347 Gk $c =$  E= 5.830951895	q+3q)5)= $c =$  Pol(3,5) r=5.830951895,θ▶ $\alpha =$  Pol(3,5) ◀,θ=59.03624347

2) Calcular catetos conociendo hipotenusa y un ángulo

&hipotenusa,ángulo)

Ejemplo

Sea el triángulo con hipotenusa $c = 4.5$ y un ángulo $\alpha = 53°$. Calcular las longitudes del cateto adyacente a y el cateto opuesto b.

Series fx-82ms y similares	Series fx-82es y similares
qe4.5,53)=	q-4.5q)53x)=
$a =$  Rec(4.5,53°): 2.708167604	$a =$  Rec(4.5,53°) X=2.708167604,Y▶
Gl	
$b =$  F= 3.593859795	$b =$  Rec(4.5,53°) ◀,Y=3.593859795
Gk	
$a =$  E= 2.708167604	

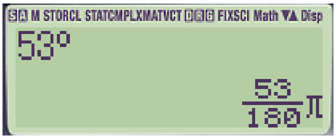
Convertir de grados a radianes y de radianes a grados

1) Para convertir de grados a radianes se debe tener la calculadora *configurada en radianes*. Luego

gradosqM1=

Ejemplo

Convertir 53° a radianes.

Series fx-82ms y similares	Series fx-82es y similares
53qM1=	53qM1=
 53° 0.925024503	 53° $\frac{53}{180}\pi$

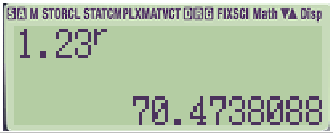
		n  53° 0.9250245036

2) Para convertir de radianes a grados se debe tener la calculadora *configurada en grados*. Luego

radianesqM2=

Ejemplo

Convertir 1.23 radianes a grados.

Series fx-82ms y similares	Series fx-82es y similares
1.23qM2=  1.23r 70.4738088	1.23qM2=  1.23r 70.4738088

Punto en el plano cartesiano

1) Calcular la distancia del origen al punto conociendo x y y

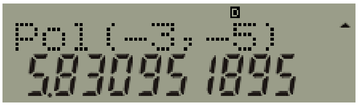
e x, y)=

Si el ángulo es positivo, entonces el ángulo es directo.

Si el ángulo es negativo, entonces se suma 360 o 2π, en grados o radianes respectivamente.

Ejemplo

Sea el punto P con coordenadas $x = -3$ y $y = -5$, determinar la distancia r del origen al punto P y el su ángulo principal θ.

Series fx-82ms y similares	Series fx-82es y similares
e-3,-5)= $r =$  Pol(-3,-5) 5.830951895 Gl  F= -120.9637565 =+360= $\theta =$  Ans+360 239.0362435 Gk  E= 5.830951895	q+-3q)-5)=  Pol(-3,-5) r=5.830951895,θ▸  Pol(-3,-5 ◂,θ=-120.9637565 360-120.9 637565 $\theta =$  360-120.9637566 239.0362434

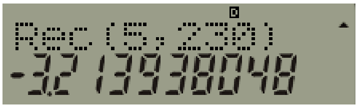
2) Calcular x y y de un punto P, según la distancia r del origen al punto y su ángulo principal θ.

& r, θ)

Ejemplo

Sea la distancia $r = 5$ del origen al punto P y un ángulo $\theta = 230°$. Calcular x y y.

Series fx-82ms y similares	Series fx-82es y similares

	qe5,230)= $x =$  Rec(5,230) -3.213938048 Gl $y =$  F= -3.830222216 Gk $x =$  E= -3.213938048	q- 5q)230)=  Rec(5,230) X=-3.213938048,  Rec(5,230) ,Y=-3.830222216

2.5 Aplicaciones con modelado matemático

Para resolver ejercicios con modelado matemático se pueden seguir los siguientes pasos.

1. Leer cuidadosamente el enunciado cuantas veces sea necesario hasta entenderlo e identificar lo que se desea resolver.
2. Se usan letras para identificar las variables.
3. Se hace una lista de los datos con que se cuenta.
4. Se hace un dibujo con las indicaciones de los datos con que se cuenta.
5. Se genera una ecuación con las relaciones de las variables, los datos y lo que expresa el enunciado.
6. Se resuelve la ecuación formulada usando las leyes de las matemáticas necesarias.
7. Se comprueban las soluciones obtenidas de acuerdo con lo expresado en el enunciado

Resolver los siguientes ejercicios

1. Dos automóviles salen del mismo punto y al mismo tiempo, uno de ellos en dirección norte a una velocidad de $50\frac{km}{h}$, el otro a $80\frac{km}{h}$ con dirección oeste. Expresar la distancia d entre los dos automóviles en función del tiempo t.

2. A las 11:00 am. Un poste de energía eléctrica proyecta una sombra de $3\,m.$, al mismo tiempo un hombre de $1.7\,m$. Proyecta una sombra de $50\,cm$. ¿qué altura tiene el poste?

3. Un pintor tiene una escalera que mide $2.3\,m$ de largo y cuando la abre se da cuenta que la distancia entre las bases es de $1.1\,m$, ¿qué altura alcanza la escalera cuando está abierta?

4. A cierta hora del día, el ángulo de inclinación del sol es de 84°; un poste de energía eléctrica que está inclinado a 11° directamente alejándose del sol, proyecta una sombra de $12\,m$. ¿cuál es la altura del poste?

5. Un globo, que al nivel del suelo, tiene dos ángulos de elevación en los puntos A y B, de 27° y 50° respectivamente. La distancia entre los puntos A y B es de $15\,km$. ¿cuál es la altura del globo?

6. Un poste con altura de $4.5\,m$, está situado sobre una colina que tiene una inclinación de 20° con respecto a la horizontal. Se desea colocar un cable que vaya desde la punta del poste hasta un punto que se localiza a $10\,m$ colina abajo desde su base. ¿cuál es la longitud mínima de cable?

7. Un deportista corre a una velocidad constante de $1\,km$ cada $7\,min$ en dirección 37° al noreste, durante $35\,min$ y luego en dirección 20° al noroeste durante $14\,min$. ¿Cuál es la distancia recorrida en línea recta del punto de inicio al punto final?

8. Desde la cima de un edificio que tiene una altura de $20\,mts$. Se puede observar la cima de un edificio más alto con un ángulo de elevación de 70°. Si se ve la cima del edificio más alto desde la calle, el ángulo de elevación es de 73°. ¿cuánto mide la distancia más corta entre los dos edificio y cuánto mide el edificio más alto?

9. El diamante de béisbol del campo del ITHua tiene cuatro bases que están a $27\, mts.$ entre sí; el montículo del pitcher está a $18\, mts.$ de la base de home. ¿Cuál es la distancia del montículo del pitcher a cada una de las otras tres bases?

10. En un faro de $15\, mts.$ de altura que está sobre un peñasco de $30\, mts.$ junto al mar, se encuentra un observador que mide un ángulo de depresión de $15°$ de un barco. ¿cuál es la distancia más corta del barco al observador y cuál es la distancia del barco a la orilla del peñasco?

11. Un alumno de Ingeniería en Sistemas Computacionales del ITHua, sus ojos están a una altura de $1.7\, mts.$, y observa la punta de la antena que se encuentra en el techo del edificio con un ángulo de elevación de $70°$ y la base de esta con un ángulo de elevación de $45°$, el estudiante se encuentra a $15\, mts.$ del laboratorio de computo. ¿Cuál es la altura de la antena?

12. Dos automóviles salen del mismo punto y al mismo tiempo, uno de ellos en dirección norte a una velocidad de $50\frac{km}{h}$, el otro a $80\frac{km}{h}$ con dirección oeste. Expresar la distancia d entre los dos automóviles en función del tiempo t.

13. A las 11:00 am. Un poste de energía eléctrica proyecta una sombra de $3\, m.$, al mismo tiempo un hombre de $1.7\, m.$ Proyecta una sombra de $50\, cm.$ ¿qué altura tiene el poste?

14. Un pintor tiene una escalera que mide $2.3\, m$ de largo y cuando la abre se da cuenta que la distancia entre las bases es de $1.1\, m$, ¿qué altura alcanza la escalera cuando está abierta?

15. A cierta hora del día, el ángulo de inclinación del sol es de $84°$; un poste de energía eléctrica que está inclinado a $11°$ directamente alejándose del sol, proyecta una sombra de

$12\,m$. ¿cuál es la altura del poste?

16. Un globo, que al nivel del suelo, tiene dos ángulos de elevación en los puntos A y B, de $27°$ y $50°$ respectivamente. La distancia entre los puntos A y B es de $15\,km$. ¿cuál es la altura del globo?

17. Un poste con altura de $4.5\,m$, está situado sobre una colina que tiene una inclinación de $20°$ con respecto a la horizontal. Se desea colocar un cable que vaya desde la punta del poste hasta un punto que se localiza a $10\,m$ colina abajo desde su base. ¿cuál es la longitud mínima de cable?

18. Un deportista corre a una velocidad constante de $1\,km$ cada $7\,min$ en dirección $37°$ al noreste, durante $35\,min$ y luego en dirección $20°$ al noroeste durante $14\,min$. ¿Cuál es la distancia recorrida en línea recta del punto de inicio al punto final?

19. Desde la cima de un edificio que tiene una altura de $20\,mts$. Se puede observar la cima de un edificio más alto con un ángulo de elevación de $70°$. Si se ve la cima del edificio más alto desde la calle, el ángulo de elevación es de $73°$. ¿cuánto mide la distancia más corta entre los dos edificio y cuánto mide el edificio más alto?

20. El diamante de béisbol del campo del ITHua tiene cuatro bases que están a $27\,mts$. entre sí; el montículo del pitcher está a $18\,mts$. de la base de home. ¿Cuál es la distancia del montículo del pitcher a cada una de las otras tres bases?

21. En un faro de $15\,mts$. de altura que está sobre un peñasco de $30\,mts$. junto al mar, se encuentra un observador que mide un ángulo de depresión de $15°$ de un barco. ¿cuál es la distancia más corta del barco al observador y cuál es la distancia del barco a la orilla del peñasco?

22. Un alumno de Ingeniería en Sistemas Computacionales del ITHua, sus ojos están a una altura de $1.7\,mts$., y observa la punta de la antena que se encuentra en el techo del edificio con un ángulo de elevación de $70°$ y la base de esta con un ángulo de elevación de $45°$, el estudiante se encuentra a $15\,mts.$ del laboratorio de computo. ¿Cuál es la altura de la antena?

Fuentes de consulta

- Aguilar Márquez, A., Bravo Vázquez, F., Gallegos Ruíz, H., Cerón Villegas, M., Reyes Figueroa, R., (2009). Matemáticas simplificadas, segunda edición. México. Pearson educación de México S.A. de C.V.

- Swokowsky, E.W., Cole, J.A., (2009). Algebra y trigonometría con geometría analítica, décimo segunda edición. México. Cengage Learning.

- Sullivan, M., (2006). Álgebra y trigonometría, séptima edición. México. Pearson educación de México S.A. de C.V.

- Larson, R. (2018). Matemáticas 4 Álgebra lineal. México. Cengage Learning.

- Granville, W. (2009). Cálculo diferencial e integral. México. Limusa.

- Poole, D. (2011). Álgebra lineal una introducción moderna tercera edición. México. Cengage Learning.

- Stewart, J. (2008). Cálculo de una variable: trascendentes tempranas, sexta edición. México. Cengage Learning.

Notas

Notas

Notas

Notas

Notas

Notas

Directorio

Gil Arturo Quijano Vega
DIRECTOR

Celia Guadalupe Zazueta Arguilez
SUBDIRECTORA ACADÉMICO

Francisca Rosario Arana Lugo
SUBDIRECTORA DE PLANEACIÓN Y VINCULACIÓN

José Soledad López González
SUBDIRECTOR DE SERVICIOS ADMINISTRATIVOS

Rosario Eugenio Anduaga Verdugo
JEFE DEL DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS

“A la Vanguardia en Ciencia y Tecnología
para el Bien de Todos®”